آمار و احتمالات مهندسی

جلسه چهارم

نحوه رسم نمودار جعبه ای (Box-Plot) در اکسل

نمونه 1	نمونه 2	نمونه3	نمونه 4
18.16	102.00	98.00	31.00
17.01	99.00	97.00	35.00
48.03	102.00	94.00	45.00
30.54	100.00	98.00	29.00
20.92	106.00	96.00	44.00
29.26	91.00	83.00	67.00
42.36	82.00	75.00	55.00
30.75	84.00	76.00	41.00
14.51	75.00	72.00	57.00
17.21	93.00	84.00	34.00
34.90	98.00	89.00	22.00
42.17	97.00	90.00	38.00
22.82	99.00	92.00	37.00
20.78	96.00	95.00	59.00
20.30	92.00	91.00	56.00
24.07	108.00	99.00	44.00
28.71	102.00	100.00	38.00
14.06	64.00	63.00	66.00
41.88	84.00	74.00	57.00
38.80	77.00	76.00	52.00
12.25	90.00	82.00	51.00
78.60	97.00	93.00	23.00
17.52	93.00	92.00	53.00
12.08	85.00	78.00	29.00
18.91	75.00	73.00	130.00
19.71	70.00	68.00	100.00
108.00	91.00	82.00	63.00
102.00	95.00	89.00	74.00
64.00	94.00	86.00	76.00
84.00	78.00	72.00	82.00
77.00	82.00	74.00	93.00
90.00	85.00	79.00	92.00
97.00	85.00	78.00	78.00
93.00	82.00	81.00	95.00
85.00	30.00	20.00	94.00
74.00	140.00	10.00	78.00
79.00	145.00	140.00	82.00
20.00	20.00	130.00	85.00

Click Here .....

ضریب تغییرات

برای مقایسه میزان پراکندگی داده های بدست آمده از دو جامعه آماری که با مقیاس های متفاوتی اندازه گیری شده اند، استفاده از انحراف از معیار مناسب نیست. زیرا انحراف از معیار به مقیاس اندازه گیری وابسته است. برای این منظور از شاخص دیگری به نام ضریب تغییرات استفاده می کنیم.

$$CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

مثال: روغن گیربکس (A) ساخت یک کارخانه دارای میانگین طول عمر ۱۲۰۰۰ کیلومتر و انحراف استاندارد ۲۰۰۰ کیلومتر و روغن ترمز همان کارخانه (B) دارای طول عمر ۸ سال و انحراف استاندارد ۰/۵ سال است. کدام محصول کارخانه مناسب تر است؟

$$CV_A = \frac{2000}{12000} = 0.167 = \%16.7 \qquad CV_B = \frac{0.5}{8} = 0.062 = \%6.2$$

از آنجایی که ضریب تغییرات روغن ترمز کمتر است، پس قابل اطمینان تر است.

استاندارد سازی

چنانچه مقدار میانگین یک نمونهٔ آماری را از مقدار تک تک اعضای آن کم کنیم و سپس مقادیر بدست آمده را بر انحراف از استاندارد نمونه آماری تقسیم کنیم، نمونهٔ آماری جدید بدست آمده استاندارد سازی شده است زیرا دارای میانگین صفر و انحراف از معیار یک می باشد.

$$y_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{S_x} \quad , \quad y_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{S_x} \quad \cdots \quad y_n = \frac{x_n - \bar{x}}{S_x}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\bar{x} - \bar{x}}{S_x} = 0 \quad ; \quad S_y^2 = \left(\frac{1}{S_x^2}\right) S_x^2 = 1}$$

مثال: دانش آموزی در کنکور، ریاضی را ۴۰٪ و فیزیک را ۶۰٪ زده است. میانگین درصد ریاضی در بین تمام داوطلبان ۱۵٪ بوده میانگین درصد فیزیک ۵۰٪ بوده است. انحراف از معیار این دو درس نیز به ترتیب ۲ و ۴ درصد می باشد. با فرض ضریب تاثیر یکسان، نمره کدام درس تاثیر بیشتری در رتبهٔ این دانش آموز خواهد داشت.

ریاضی $\frac{40-15}{2} = 12.5$ فیزیک $\frac{60-50}{4} = 2.5$

از آنجایی که نمره استاندارد شدهٔ ریاضی بیشتر از فیزیک است، بنابراین تاثیر نمره ریاضی در رتبه این دانش آموز بیشتر از درس فیزیک است.

اصول شمارش

- برای انجام فعالیتی دو ابزار A و B مورد نیاز است که البته استفاده همزمان این دو ممکن نیست. به کمک ابزار A به ۲ طریق و به کمک ابزار B به ۳ طریق می توان کار را انجام داد.

طبق اصل جمع: به ۵ طریق (۳+۲) می توان کار را انجام داد

- برای انتخاب منوی یک رستوران از بین ۳ غذا (A) و ۲ دسر (B) انتخاب های مختلفی می توان سفارش داد. (A و B همزمان انتخاب می شوند)

طبق اصل ضرب: تنوع سرو غذا در این رستوران برابر با ۶ (۲×۳) خواهد بود.

- **ترکیب اصل جمع و ضرب**:

برای انتخاب منوی یک رستوران از بین ۴ پیش غذا (A) و ۵ نوع غذا (B) و ۳ دسر (C) انتخاب های مختلفی می توان سفارش داد. چنانچه برای صرفه جویی در هزینه ها فقط از دو نوع سرویس قادر به استفاده باشیم، چند انتخاب در پیشرو داریم؟

$$4 \times 5 + 5 \times 3 + 4 \times 3 = 47$$

جایگشت ها (Permutation)

جایگشت ها: قرار گیری n شیئ مجزا به صورت یک صف (که ترتیب قرار گیری در صف مهم است).

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \ldots 3 \times 2 \times 1$$

تعداد حالاتی که می توان اعداد از ۱ تا ۵ را در کنار یکدیگر قرار داد تا یک عدد ۵ رقمی تولید شود برابر !۵ (۱۲۰) حالت مختلف است.

جایگشت r شیئ از بین n شیئ مجزا برابر است با:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

مثال: تعداد حالاتی که می توان اعداد ۱ تا ۵ را در کنار یکدیگر قرار داد و عدد سه رقمی ساخت:

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

نکته ۱: جایگشت انتخاب n شیئ از n شیئ برابر است با !n

نکته ۲: جایگشت انتخاب ۱ شیئ از n شیئ برابر است با n

ترکیب (Combination)

ترکیب r شیئ از بین n شیئ مجزا (بدون در نظر گرفتن ترتیب):

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

معمولاً در مسائل مربوط به ترکیب از الفاظ تشکیل **تیم** یا **گروه** استفاده می شود که در آنها ترتیب قرار گرفتن در کنار یکدیگر مهم نیست.

مثال ۱: تعداد حالاتی که می توان از بین ۵ نفر یک تیم ۳ نفره تشکیل داد.

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2!} = 10$$

مثال ۲: تعداد حالاتی که می توان ۲ درس ریاضی از ۶ درس ارائه شده و ۳ درس انگلیسی از ۷ درس ارائه شده در بخش زبان برای یک دانشجو انتخاب کرد برابر با ۵۲۵ روش است.

$$\binom{6}{2}.\binom{7}{3} = 15\times 35 = 525$$

مثال ۳: از بین ۴ مهندس و ۵ مدیر و ۲ سرپرست می خواهیم یک تیم ۳ نفره انتخاب کنیم. تعداد حالات انتخاب برابر است با:

$$\binom{4}{3}.\binom{5}{0}.\binom{2}{0} + \binom{4}{0}.\binom{5}{3}.\binom{2}{0} + \binom{4}{0}.\binom{5}{1}.\binom{2}{2} + \binom{4}{1}.\binom{5}{0}.\binom{2}{2} +$$

$$\binom{4}{1}.\binom{5}{1}.\binom{2}{1} + \binom{4}{2}.\binom{5}{1}.\binom{2}{0} + \binom{4}{1}.\binom{5}{2}.\binom{2}{0}$$

ترکیب (Combination)

نکته ۱: ترکیب r از n با ترکیب n-r از n برابر است.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{n-r} = C_{n-r}^n$$

نکته ۲: ترکیب n از n برابر با 1 است.

$$C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

نکته ۳: ترکیب n-1 از n برابر با n است.

$$C_{n-1}^n = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$$

نکته ۴: اگر عناصر غیر متمایز و تکرار مجاز باشد، ترکیبr شیئ از n شیئ برابر است با:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$ ➔ که با توجه به نکته ۱ داریم ➔ $$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

ترکیب (Combination)

مسئله:

- تعداد جواب‌های صحیح و غیر منفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = r$ برابر است با $\binom{n+r-1}{n-1}$

زیرا اعداد صحیح نا منفی از ۰ تا r را باید در n مکان قرار داد و تکرار نیز مجاز است.

تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ برابر با $\binom{3+8-1}{8} = \binom{3+8-1}{2} = 45$

یک آسانسور از طبقه همکف با ۸ نفر حرکت می‌کند. در طبقه ششم هیچکس در آسانسور باقی نماند. تعداد حالات ممکن برای پیاده شدن افراد برابر است با تعداد جواب های معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$

$$\binom{5+8-1}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = 990$$

مسئله:

- ثابت کنید:

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$$

احتمال (Probability)

نسبت دادن یک عدد به نتایج یک **آزمایش تصادفی**

آزمایش تصادفی یعنی آزمایشی که تحت شرایط یکسان با هربار تکرار ممکن است نتیجه متفاوتی داشته باشد. البته مجموعه این نتایج (یا فضای نمونه) از قبل مشخص است ولی معلوم نیست که حاصل آزمایش تصادفی کدام یک از اعضای این مجموعه است زیرا عامل تصادف و شانس در حصول نتیجه آزمایش دخیل است.

به عنوان مثال **پرتاب تاس** یا **طول عمر لامپ** های تولیدی یک کارخانه یک آزمایش تصادفی است.

فضای نمونه (Sample Space): مجموعهٔ همه برآمدهای یک آزمایش تصادفی

فضای نمونه و پیشامد

فضای نمونه گسسته (شمارش پذیر)

- فضای نمونه متناهی
- فضای نمونه نامتناهی

فضای نمونه پیوسته

- فضای نمونه نامتناهی

پیشامد تصادفی (Event): زیرمجموعه ای از فضای نمونهٔ آزمایش تصادفی است.

پیشامد **محال**: پیشامد بدون هیچ عضو را گویند

پیشامد **حتمی**: پیشامدی برابر با فضای نمونه

پیشامد **ساده**: پیشامد تک عضوی

پیشامد **مرکب**: پیشامد بیش از یک عضو

اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی برآمدی باشد که عضو یک پیشامد A باشد، می گوییم پیشامد A رخ داده است.

روابط بین پیشامدها

زیر پیشامد: A را زیر پیشامد B گویند اگر A زیر مجموعه B باشد. یعنی رخداد پیشامد A به معنی رخداد پیشامد B باشد.

دو پیشامد برابر: A و B را دو پیشامد برابر گویند، اگر A زیر پیشامد B و B زیر پیشامد A باشد.

مثلاً در پرتاب یک تاس، پیشامد مشاهده عدد ۲ زیر پیشامد مشاهده عدد زوج است.

از طرفی دیگر در پرتاب یک تاس، پیشامد عدد زوج کمتر از ۳ ، برابر با پیشامد عدد ۲ است.

اجتماع دو پیشامد (Union): $A \cup B = \{\omega;\ \omega \in A \text{ or } \omega \in B\}$

اشتراک دو پیشامد (Intersection): $A \cap B = \{\omega;\ \omega \in A,\ \omega \in B\}$

مکمل یک پیشامد (Complement): $A' = \{\omega;\ \omega \notin A\}$

تفاضل دو پیشامد (Subtraction): $A - B = \{\omega;\ \omega \in A,\ \omega \notin B\}$

قانون دمورگان: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\quad$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

روابط بین پیشامدها

اگر A پیشامد قبولی یک دانشجو در رشته ریاضی و B پیشامد قبولی او در رشته فیزیک باشد:

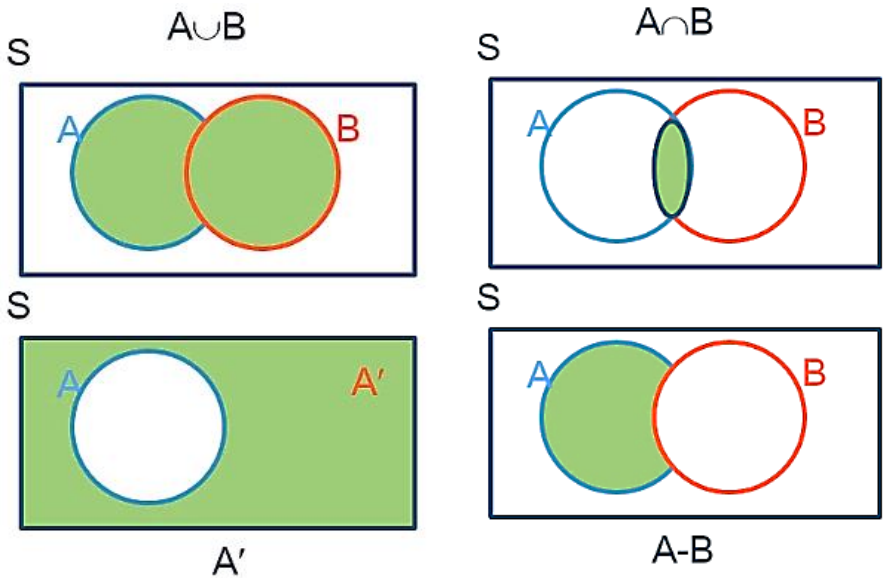
- پیشامد اینکه او حداقل در یکی از این رشته ها قبول شود برابر با $A \cup B$ خواهد بود.
- پیشامد اینکه او فقط در یک رشته قبول شود برابر با $A \cup B - (A \cap B)$ است.
- پیشامد اینکه او در هیچ کدام از این دو رشته قبول نشود برابر با $(A \cup B)' = A' \cap B'$ است.

پیشامد های ناسازگار

اگر دو پیشامد دارای هیچ اشتراکی نباشند آنها را دو به دو ناسازگار گویند. $A \cap B = \varnothing$

به عنوان مثال پیشامد های A مشاهدات اعداد زوج و B مشاهدات اعداد فرد ناسازگار (یا جدا از هم) هستند.

نمودار **وِن** رابطه بین پیشامد ها و مجموعه ها را به خوبی نشان می دهد.



محاسبه احتمال

محاسبه احتمال به شیوه همشانسی:

اگر پیشامدهای یک آزمایش تصادفی شانس یکسانی برای وقوع داشته باشند، احتمال هر پیشامد برابر حالات مطلوب بر کل حالات ممکن محاسبه می شود.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

محاسبه احتمال به شیوه فراوانی نسبی:

احتمال یک پیشامد، درصد دفعاتی است که پیشامدهایی مشابه در تکرارهای مکرر ظاهر شود.

مسئله:

چهار زوج برای یک سینما بلیط تهیه کرده‌اند. و در یک ردیف قرار گرفته‌اند. احتمال اینکه زوج‌ها در کنار یکدیگر بنشینند برابر با

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4!\,(2!)^4}{8!}=\frac{1}{150}$$

و احتمال اینکه مردها در یک قسمت و زنها در سمت راست مردان قرار گیرند برابر با

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4!4!}{8!}=\frac{1}{70}$$