

بسمه تعالی

سیستمهای کنترل خطی

University of Mohaghegh Ardabili (UMA)

Dr. K. Sabahi

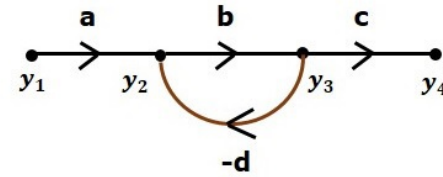
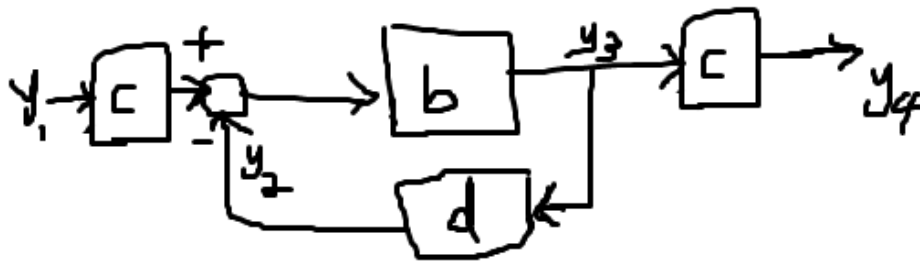
ksabahi2005@gmail.com

عناوین

- نمودار گذر سیگنال (SFG)
- بدست آوردن تابع تبدیل از روی SFG
- بررسی پایداری یک سیستم به روش روث
- حل مثال های متنوع
- تعریف حساسیت در یک سیستم

نمودار گذر سیگنال (SFG)

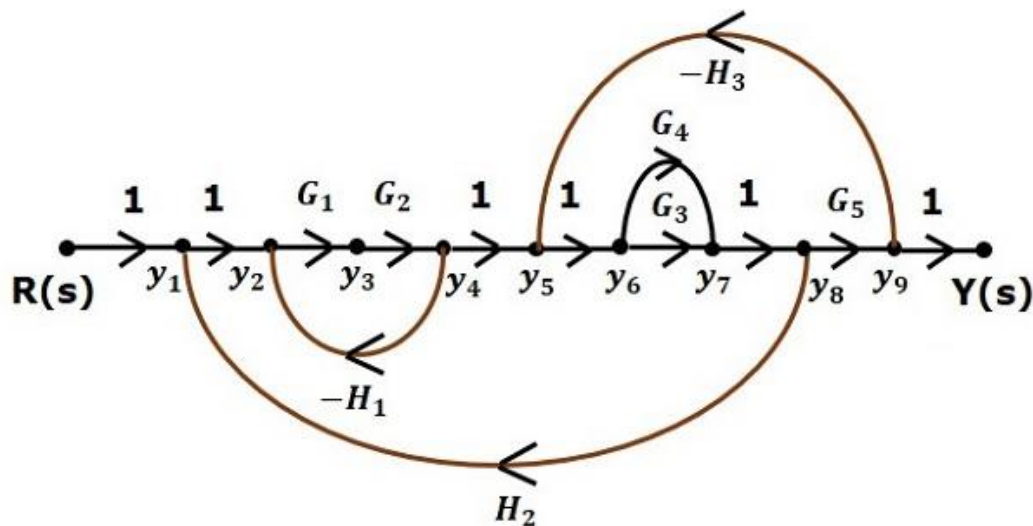
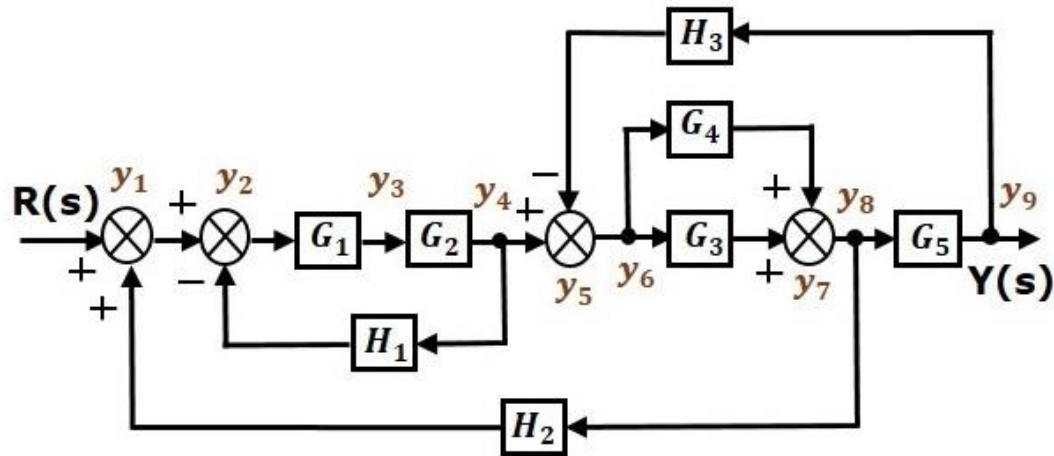
اگر تعداد بلوک‌های سیستم زیاد باشد، ساده‌سازی نمودار بلوکی کاری دشوار است. یکی دیگر از ابزارهای مفید برای نمایش تصویری سیستم‌ها، نمودار گذر سیگنال است که به جای ساده‌سازی، با استفاده از یک فرمول (قاعده میسون) می‌توان تابع تبدیل سیستم مرتبط با آن را به دست آورد.



- گره‌های نمودار گذر سیگنال شکل بالا y_1, y_2, y_3 و y_4 است.
- y_1 و y_4 به ترتیب، گره‌های ورودی و خروجی هستند.
- y_2 و y_3 گره‌های ترکیبی هستند.

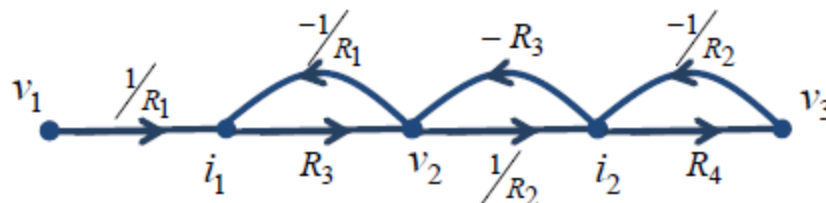
نمودار گذر سیگنال (SFG)

بدست آوردن SFG از روی بلوک دیاگرام



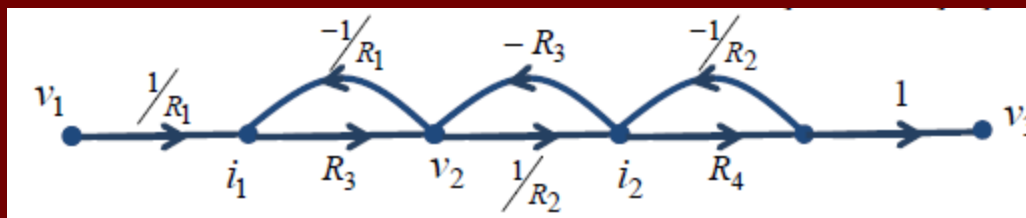
نمودار گذر سیگنال (SFG)

- **مسیر (Path)**، یک پیمایش از شاخه های متصل در جهت پیکان های شاخه می باشد.
- اگر مسیر از هیچ گره ای بیش از یک بار عبور نکند، **مسیر باز** نامند.
- هرگاه مسیر در گره ای که آغاز شده، خاتمه یابد و از هیچ گره ای دیگر بیش از یک مرتبه عبور نکند، یک **مسیر بسته** یا **حلقه (Loop)** نامند.
- حاصلضرب بهره شاخه های یک حلقه را **بهره حلقه (Loop gain)** نامند.
- **حلقه های مجزا (Nontouching loop)**، حلقه هایی را نامند که گره مشترکی نداشته باشند.
- **مسیر پیشرو (Forward path)**، مسیری است که از یک گره ورودی آغاز و در یک گره خروجی پایان یابد و از هیچ گره ای بیش از یک مرتبه عبور نکند.
- **بهره مسیر پیشرو (Forward path gain)**، حاصلضرب بهره تمام شاخه های مسیر پیشرو می باشد.



محاسبه تابع تبدیل از روی SFG با استفاده از قاعده میسون

تابع تبدیل سیستم زیر را SFG بدست آورید.



تابع تبدیل را می‌توان با استفاده از قاعده بهره میسون به صورت زیر بدست آورد:

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_N \Delta_N}{\Delta}$$

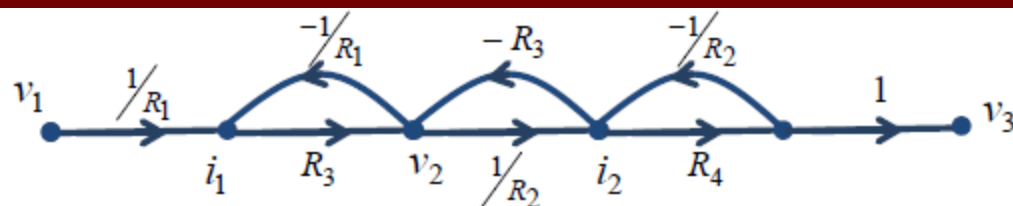
$\Delta = 1 -$ (مجموع حاصلضرب بهره های هر دو حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند) + (مجموع بهره های کلیه حلقه های تکی) -
 ... + (مجموع حاصلضرب بهره های هر سه حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots + (-1)^m \sum \dots + \dots$$

P_i : بهره i امین مسیر پیش‌رو

Δ_i : مقدار Δ برای مسیر پیش‌روی i ام که با حلقه‌های درگیر با همان مسیر در تماس نیست.

محاسبه تابع تبدیل با استفاده از قاعده میسون



$$G = \frac{V_3}{V_1} = ?$$

دو حلقه غیر مشترک: L_3, L_1

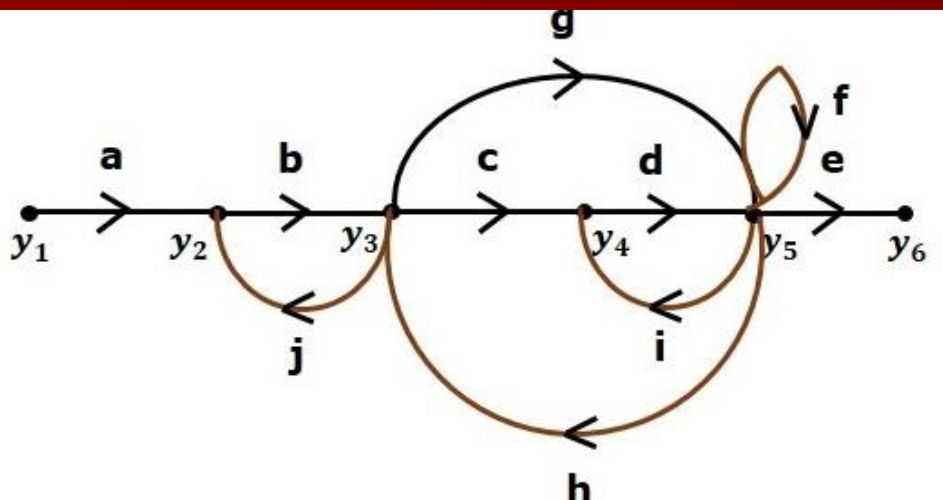
سه حلقه غیر مشترک: 0

$$P_1 = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}, \quad \Delta_1 = 1, \quad L_1 = -\frac{R_3}{R_1}, \quad L_2 = -\frac{R_3}{R_2}, \quad L_3 = -\frac{R_4}{R_2},$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3 = 1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}$$

محاسبه تابع تبدیل با استفاده از قاعده میسون



تعداد مسیرهای پیش‌رو: $N = 2$

مسیر پیش‌روی اول: $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_6$

بهره مسیر پیش‌روی اول: $p_1 = abcde$

• مسیر پیش‌روی دوم: $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_5 \rightarrow y_6$

• بهره مسیر پیش‌روی دوم: $p_2 = abge$

تعداد حلقه‌ها: $L = 5$

حلقه‌ها: $y_5 \rightarrow y_5$ و $y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_4$, $y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_3$, $y_3 \rightarrow y_5 \rightarrow y_3$, $y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_2$

بهره حلقه‌ها: $l_5 = f$ و $l_4 = di$, $l_3 = cdh$, $l_2 = gh$, $l_1 = bj$

تعداد جفت حلقه‌های بدون تماس: 2

جفت حلقه بدون تماس اول: $y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_4$ و $y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_2$

حاصل ضرب بهره‌های دو حلقه بدون تماس اول: $l_1 l_4 = bjdi$

جفت حلقه بدون تماس دوم: $y_5 \rightarrow y_5$ و $y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_2$

حاصل ضرب بهره‌های دو حلقه بدون تماس دوم: $l_1 l_5 = bjf$

محاسبه تابع تبدیل با استفاده از قاعده میسون

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1L_4 + L_1L_5) - (0)$$

با جایگذاری مقادیر در معادله بالا، داریم:

$$\Delta = 1 - (bj + gh + cdh + di + f) + (bjdi + bjf)$$

$$T = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=1}^2 P_i \Delta_i}{\Delta}$$

$$T = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$$

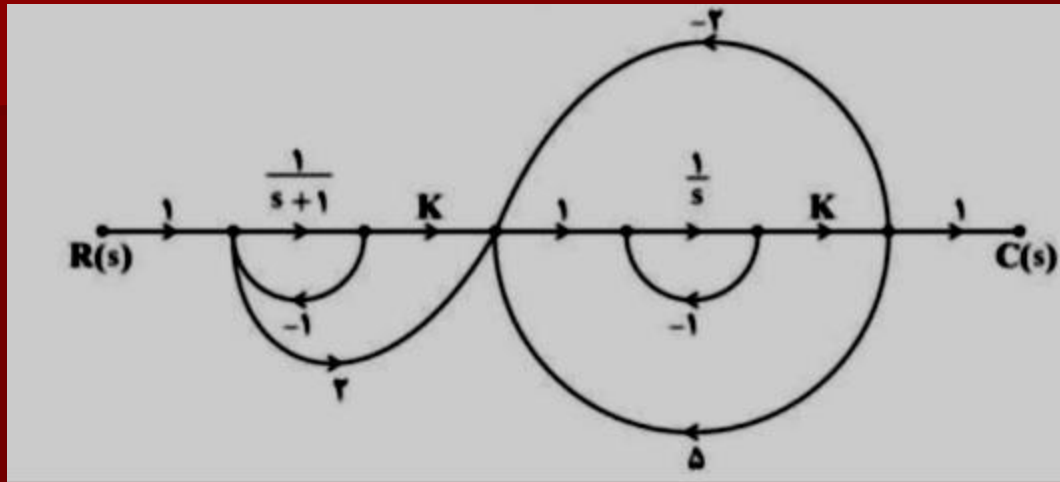
$$T = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(abcde)1 + (abge)1}{1 - (bj + gh + cdh + di + f) + bjdi + bjf}$$

$$\Rightarrow T = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(abcde) + (abge)}{1 - (bj + gh + cdh + di + f) + bjdi + bjf}$$

بنابراین، تابع تبدیل برابر است با:

$$T = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(abcde) + (abge)}{1 - (bj + gh + cdh + di + f) + bjdi + bjf}$$

محاسبه تابع تبدیل با استفاده از قاعده میسون



$$P_1 = \frac{1}{s+1} K \frac{1}{s} K = \frac{K^2}{s(s+1)} \quad \epsilon \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = 2 \frac{1}{s} K = \frac{2K}{s} \quad \epsilon \quad \Delta_2 = 1$$

$$L_1 = \frac{-1}{s+1} \quad \epsilon \quad L_2 = \frac{-1}{s} \quad \epsilon \quad L_3 = \frac{5K}{s} \quad \epsilon \quad L_4 = \frac{-2K}{s}$$

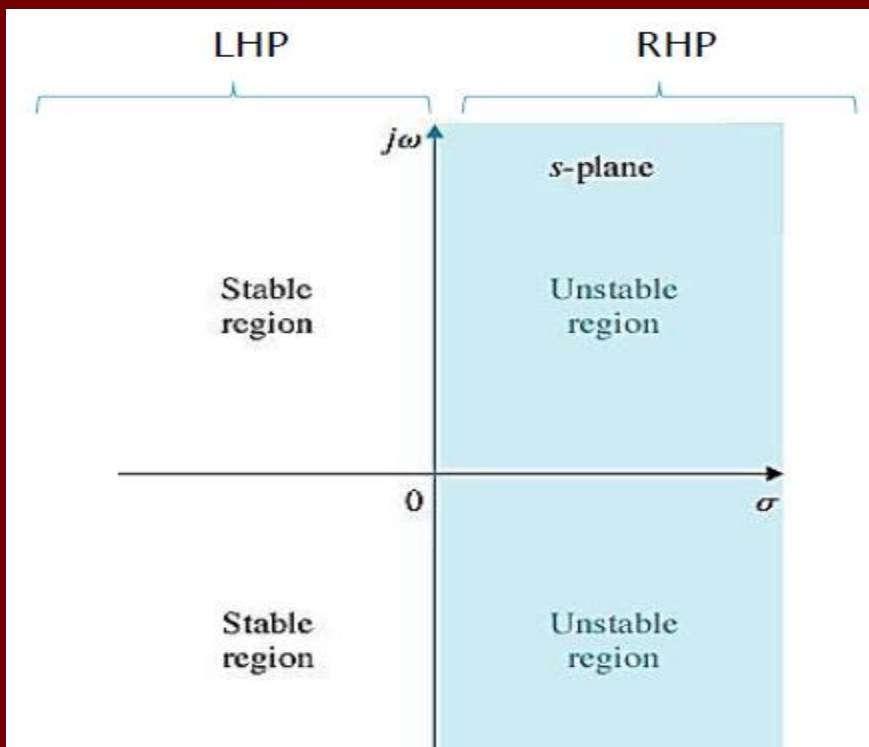
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_1 L_4)$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{5K}{s} - \frac{2K}{s} \right) + \left(\frac{1}{s(s+1)} - \frac{5K}{s(s+1)} + \frac{2K}{s(s+1)} \right)$$

$$= \frac{s^2 + s + s + s + 1 - 5Ks - 5K + 2Ks + 2K + 1 + 5K + 2K}{s(s+1)} = \frac{s^2 + (3-3K)s + 2-6K}{s(s+1)} \rightarrow \frac{C}{R} = \frac{K^2 + 2K(s+1)}{s^2 + (3-3K)s + 2-6K}$$

بررسی پایداری سیستم

$$G(s) = \frac{s(s+1)(s-1)}{s^6 + 8s^5 + 18s^4 + 6s^3 - 7s^2 - 2s - 24}$$



$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

در حالت کلی بدست آوردن قطبهای سیستم درجه بالاتر سخت است تا بتوانیم سمت چپ یا راست بودن آنها را تعیین کنیم.

روش روث – هریتز جهت بررسی پایداری سیستم

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

در تابع تبدیل فوق چند جمله ای مخرج، که همان قطبهای سیستم هستند، به عنوان معادله مشخصه سیستم می باشد.

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0 = 0 \quad \text{معادله مشخصه سیستم}$$

طبق روش روث – هریتز چند جمله ای q پایدار است، اگر:

– شرط لازم: تمامی ضرایب معادله مشخصه $(a_n, \dots, a_1, a_0)$ غیر صفر و هم علامت باشند

- شرط کافی پایداری آنست که در جدول روث و در ستون اول تغییر علامتی نداشته باشیم. به ازای هر یک تغییر علامت در ستون اول، سیستم $T(s)$ یک قطب ناپایدار دارد.

روش روث - هرولتز جهت بررسی پایداری سیستم

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0 = 0$$

جدول روث

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...	ضرایب معادله مشخصه	
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...		
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...		$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$
$\vdots$	$\vdots$						
s^1	g_1	...				$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$
s^0	k_1	...					

- شرط کافی برای پایداری اینست که در **جدول روث** و در **ستون اول** **تغییر علامتی** نداشته باشیم و به ازای هر یک تغییر علامت در ستون اول، معادله مشخصه $q(s)$ یک قطب ناپایدار دارد.

روش روث - هرولتز جهت بررسی پایداری سیستم

$$G(s) = \frac{s(s+1)(s-1)}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 15}$$

معادله مشخصه سیستم $p(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 15 = 0$

s^4	1	11	15
s^3	6	6	
s^2	10	15	
s^1	-3		
s^0	15		

- در ستون اول دو تغییر علامت داریم پس ، سیستم دو قطب ناپایدار دارد.

روش روث- هرولتز جهت بررسی پایداری سیستم

$$G(s) = \frac{3}{s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 8s + 2}$$

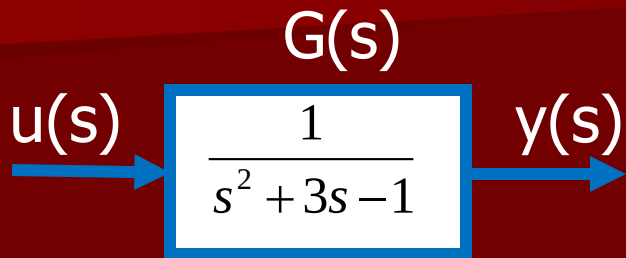
$$P(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 8s + 2 = 0$$

معادله مشخصه سیستم

s^5	1	5	8
s^4	4	8	2
s^3	3	$7/5$	
s^2	-2	2	
s^1	$10/5$		
s^0	2		

از آرایه تشکیل شده داریم که به علت تغییر علامت در اولین ستون، معادله داده شده ناپایدار است و علاوه بر آن تعداد قطبهای ناپایدار آن دو می باشد. زیرا علامت آن تغییر کرده است.

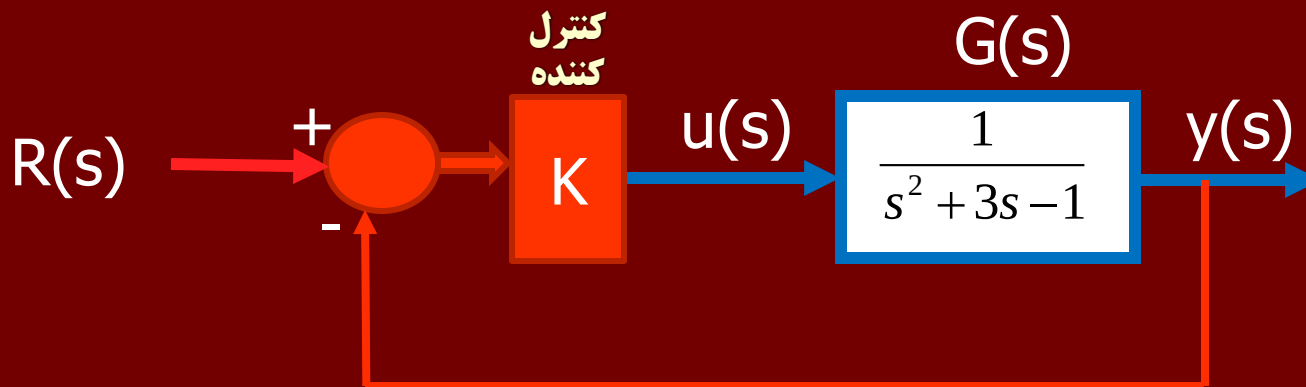
مثال: روش روث - هرویتز



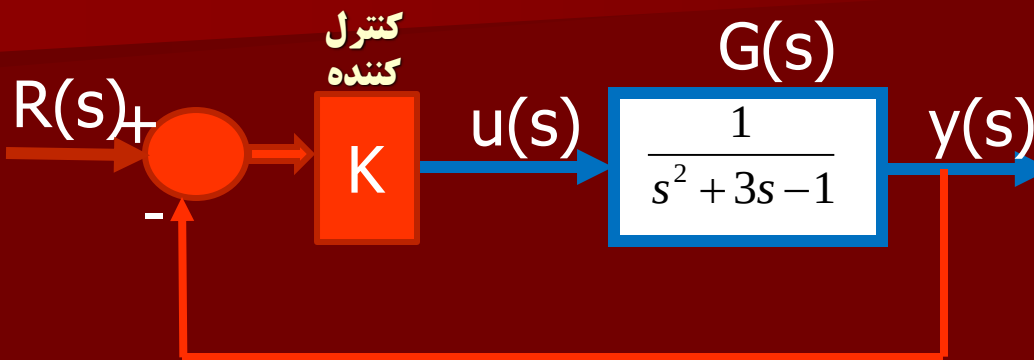
سیستم حلقه باز G یک قطب ناپایدار دارد.

s^2	1	-1
s^1	+3	0
s^0	-1	

برای سیستم ناپایدار G ، کنترل کننده ای در حالت حلقه بسته بصورت زیر طراحی می کنیم که در آن کنترل کننده بصورت یک بهره تناسبی k (کنترل کننده P) است. تابع تبدیل حلقه بسته y/R را بدست آورده و مقدار بهره کنترل کننده را برای پایداری آن تعیین کنید.



مثال: روش روث - هرولتز



$$\frac{y}{R} = \frac{k \times \frac{1}{s^2 + 3s - 1}}{1 + k \times \frac{1}{s^2 + 3s - 1}} = \frac{k}{s^2 + 3s - 1 + k}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & -1+k \\ s^1 & 3 & 0 \\ s^0 & -1+k & \end{array}$$



$$-1+k > 0$$



$$k > 1$$

جهت پایداری حلقه بسته، می بایست بهره کنترل کننده بزرگتر از یک انتخاب شود.

روش روث – هر ویتز: مورد خاص

مورد خاص در تشکیل آرایه روث هنگامی رخ می دهد که کلیه عناصر یک سطر از آرایه روث صفر شوند. صفر شدن کلیه عناصر سطر، توسط جفت ریشه های مختلط مزدوج که قسمت حقیقی آنها لزوماً غیر صفر نیست و (یا) توسط جفت ریشه های حقیقی با علامتهای متضاد بوجود می آید.

چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید

$$P(s) = s^5 + 2s^4 + 15s^3 + 30s^2 - 20s - 40 = 0$$

برای تکمیل آرایه از معادله کمکی ردیف دوم استفاده می کنیم. داریم

$$2s^4 + 30s^2 - 40 = 0 \quad \text{یا} \quad s^4 + 15s^2 - 20 = 0$$

با مشتق گیری از معادله کمکی بدست می آوریم

$$4s^3 + 30s - 0 = 0 \quad \text{یا} \quad 2s^3 + 15s - 0 = 0$$

s^5		1	15	-20
s^4		2	30	-40
s^3		0	0	

روش روث – هرویتز: مورد خاص

$$\begin{array}{r|rrrr}
 s^5 & 1 & 15 & -20 & \\
 s^4 & 2 & 30 & -40 & \\
 s^3 & 2 & 15 & & \\
 s^2 & 15/2 & -20 & & \\
 s^1 & 30.5/2 & & & \\
 s^0 & -20 & & &
 \end{array}$$

برای تکمیل آرایه از معادله کمکی ردیف دوم استفاده می‌کنیم. داریم

$$2s^4 + 30s^2 - 40 = 0 \quad \text{یا} \quad s^4 + 15s^2 - 20 = 0.$$

با مشتق‌گیری از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$$4s^3 + 30s - 0 = 0 \quad \text{یا} \quad 2s^3 + 15s - 0 = 0.$$

بنابراین چند جمله‌ای داده شده تنها یک ریشه ناپایدار دارد.

نکته: در وقوع سطر صفر، ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های چندجمله‌ای $P(s)$ نیز هستند

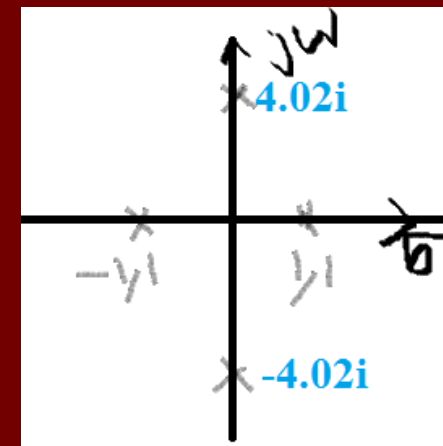
$$s^4 + 15s^2 - 20 = 0 \Rightarrow s^2 = X$$

$$X^2 + 15X - 20 = 0$$

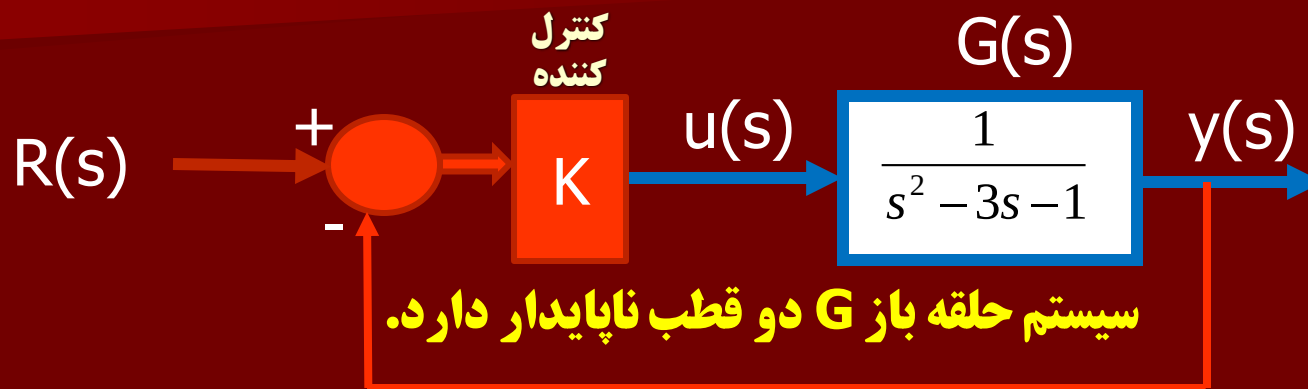
$$\Rightarrow X = 1.23, -16.23$$

$$s^2 = 1.23 \Rightarrow s = +1.1, -1.1$$

$$s^2 = -16.23 \Rightarrow s = +4.02i, -4.02i$$



روش روث - هرولتز جهت بررسی پایداری سیستم

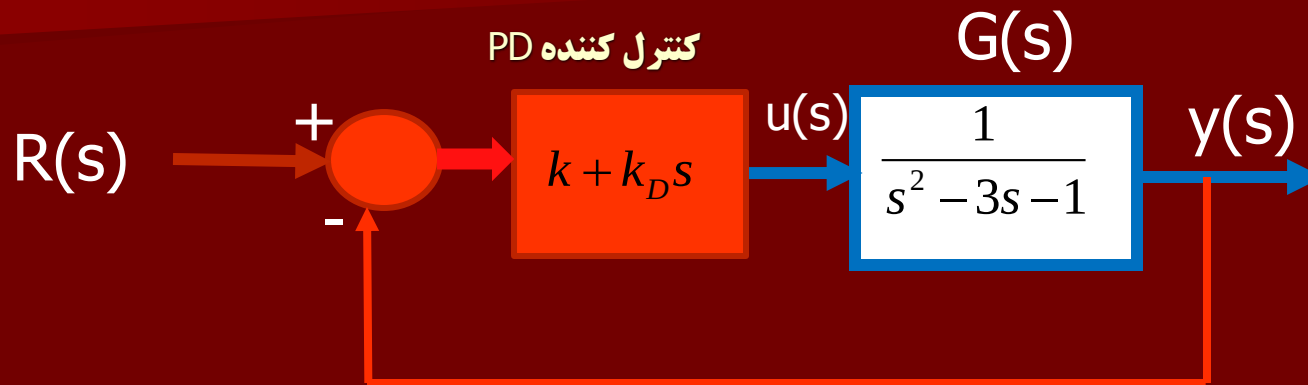


$$\frac{y}{R} = \frac{k \times \frac{1}{s^2 - 3s - 1}}{1 + k \times \frac{1}{s^2 - 3s - 1}} = \frac{k}{s^2 - 3s - 1 + k}$$

s^2	1	$-1+k$
s^1	-3	0
s^0	$-1+k$	

این کنترل کننده (کنترل کننده تناسبی P) توانایی پایداری سازی سیستم حلقه بسته را ندارد. چرا؟

مثال: روش روث - هرویتز



$$\frac{y}{R} = \frac{(k + k_D s) \times \frac{1}{s^2 - 3s - 1}}{1 + (k + k_D s) \times \frac{1}{s^2 - 3s - 1}} = \frac{k + k_D s}{s^2 - 3s - 1 + k + k_D s} = \frac{k + k_D s}{s^2 + (-3 + k_D)s - 1 + k}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & -1+k \\ s^1 & -3+k_D & 0 \\ s^0 & -1+k & \end{array}$$

جهت پایداری حلقه بسته، می بایست بهره های کنترل کننده بصورت زیر انتخاب شود.



$$k_D > 3$$

$$k > 1$$

تعریف حساسیت در یک سیستم

در طراحی کنترل کننده برای یک سیستم، معمولاً فرض می شود که مدل سیستم و مدل کنترل کننده طراحی شده دقیق بوده و نمایشهای کاملی از تحقق فیزیکی و واقعی آنها هستند. این فرض، خطاهای موجود در مدلسازی و مراحل مختلف ساخت، و هم چنین خطاهای اندازه گیری را نادیده می گیرد. علاوه بر آن، در کلیه سیستم های کنترل اثرات مختلفی مانند تغییرات محیط، فرسودگی، عدم دسترسی به برخی پارامترهای سیستم و غیره موجب آن می گردند که همواره در صدی نامعینی^۱ در رابطه با مدل های در دست و طراحی شده وجود داشته باشد.

بررسی این مطالب که عملکرد سیستم به چه اندازه ای نسبت به بعضی از تغییرات یا خطاهای موجود در پارامترهای آن، حساس می باشد در طراحی سیستم های عملی کنترل فوق العاده مهم است. به این بررسی، بررسی حساسیت^۲ سیستم گفته می شود.

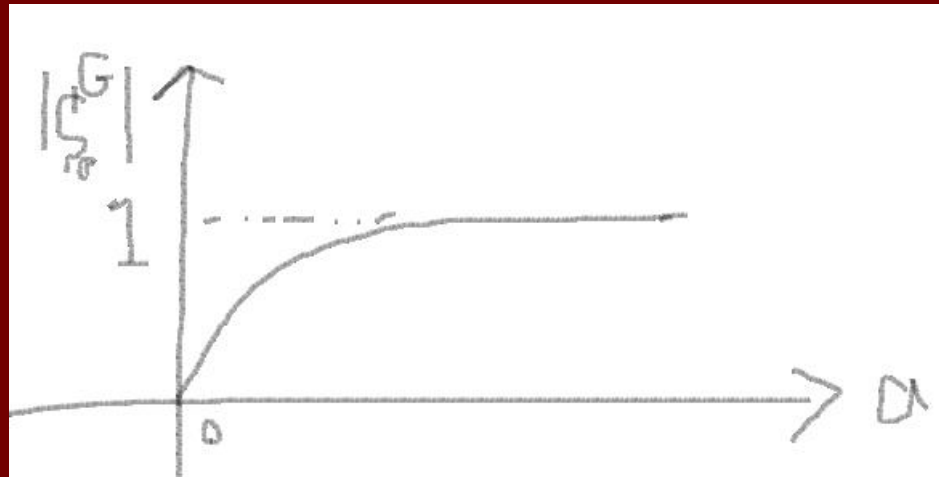
تعریف حساسیت در یک سیستم

$$G = \frac{1}{s + a}$$

در سیستم فوق، حساسیت تابع تبدیل سیستم نسبت به پارامتر a بصورت زیر تعریف می شود:

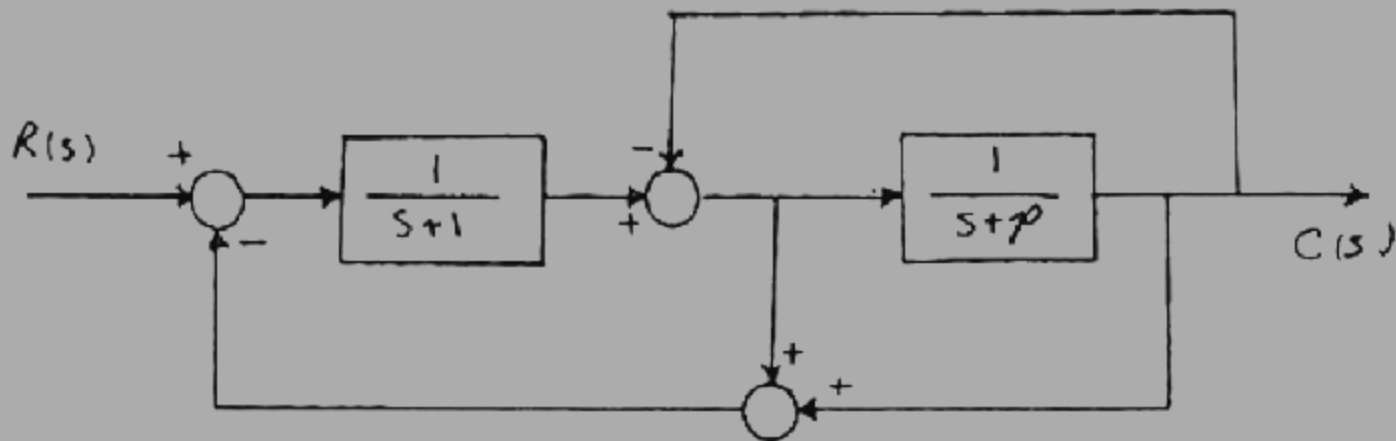
$$S_a^G = \frac{\partial G}{\partial a} \times \frac{a}{G} = \frac{0-1}{(s+a)^2} \times \frac{a}{\frac{1}{s+a}} = \frac{-a}{s+a}$$

$$|S_a^G| = \left| \frac{-a}{s+a} \right| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}}$$



تمرینات

پایداری سیستم زیر را براساس P بدست آورید.



در سیستم فوق، تابع تبدیل با sfg بدست آید.

تمرینات

۲- حساسیت تابع تبدیل حلقه - باز $G(s)$ را نسبت به تغییرات در پارامتر τ برای

$$G(s) = e^{-\tau s} \hat{G}(s)$$

پیدا کنید.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

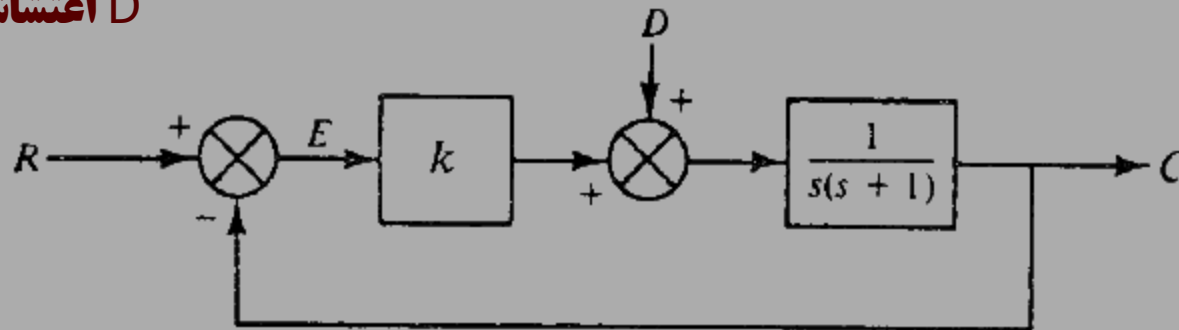
$$G(s) = \frac{k \left(1 - \frac{T}{4}s \right)^2}{s \left(1 + \frac{T}{4}s \right)^2}$$

پایداری سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات بهره k و ثابت T بررسی کنید.

تمرینات

سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. اثر k بر اغتشاش وارده به سیستم چیست؟

D اغتشاش است



تمرینات

پایداری معادله مشخصه $P(s) = s^6 + 8s^5 + 18s^4 + 6s^3 - 7s^2 - 2s - 24 = 0$ را با استفاده از روش روث بررسی کنید

پایداری حلقه بسته سیستم زیر را براساس k تعیین کنید

