سیستمهای کنترل مدرن

فصل ششم: پایداری

مدرس:

دکتر عادل اکبری مجد

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

سیستم خطی درجه دو را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

با انتخاب تبدیل همانندی $\mathbf{T}$ ماتریس و قطری سازی

$$\mathbf{J}_r = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \qquad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{J}_r\mathbf{z}(t)$$

یکی از حالتهای زیر ممکن است رخ دهد:

$$J_r = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

Case 1. Both eigenvalues are real: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

$$\mathbf{T} = [v_1, v_2]$$

v_1 & v_2 are the real eigenvectors associated with λ_1 & λ_2

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \qquad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$$

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t}, \qquad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}$$

$$z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad c = z_{20}/(z_{10})^{\lambda_2/\lambda_1}$$

The shape of the phase portrait depends on the signs of λ_1 and λ_2

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

$e^{\lambda_1 t}$ and $e^{\lambda_2 t}$ tend to zero as $t \to \infty$

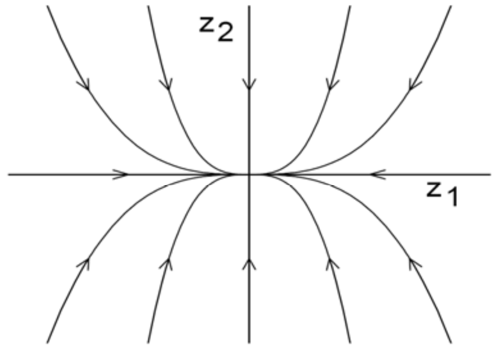
$e^{\lambda_2 t}$ tends to zero faster than $e^{\lambda_1 t}$

Call λ_2 the fast eigenvalue (v_2 the fast eigenvector) and λ_1 the slow eigenvalue (v_1 the slow eigenvector)

The trajectory tends to the origin along the curve $z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ with $\lambda_2/\lambda_1 > 1$

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{[(\lambda_2/\lambda_1)-1]}$$

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو



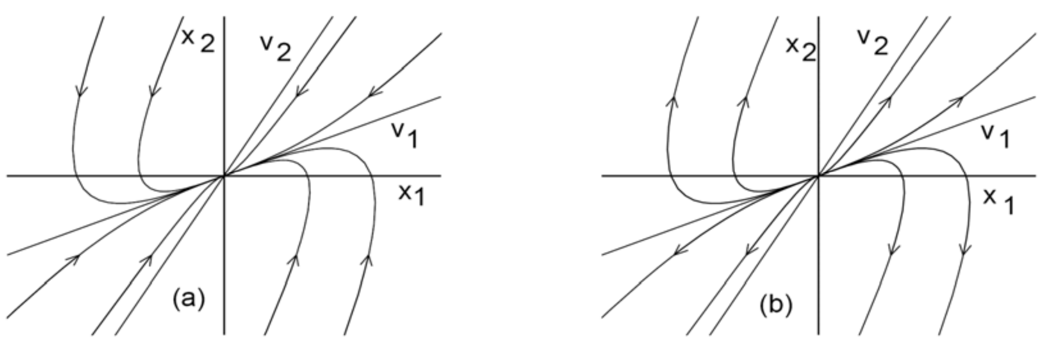
Stable Node

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$$

Reverse arrowheads

Reverse arrowheads $\Longrightarrow$ Unstable Node

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو



Stable Node

Unstable Node

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

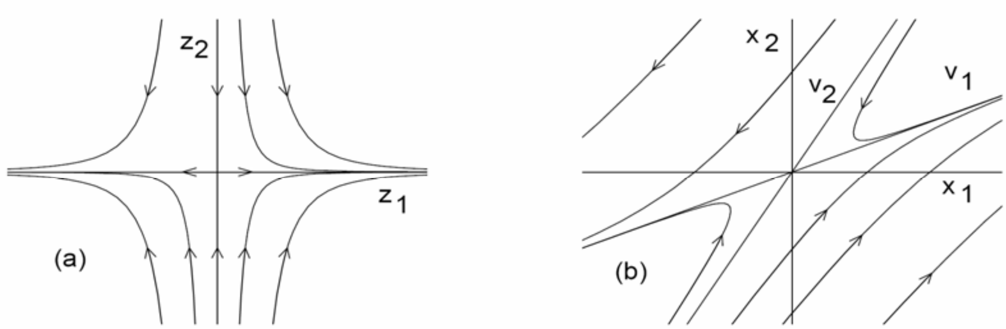
$$e^{\lambda_1 t} \to \infty, \text{ while } e^{\lambda_2 t} \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

Call λ_2 the stable eigenvalue (v_2 the stable eigenvector) and λ_1 the unstable eigenvalue (v_1 the unstable eigenvector)

$$z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \lambda_2/\lambda_1 < 0$$

Saddle

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو



Phase Portrait of a Saddle Point

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

Case 2. Complex eigenvalues: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

$$\dot{z}_1 = \alpha z_1 - \beta z_2, \qquad \dot{z}_2 = \beta z_1 + \alpha z_2$$

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

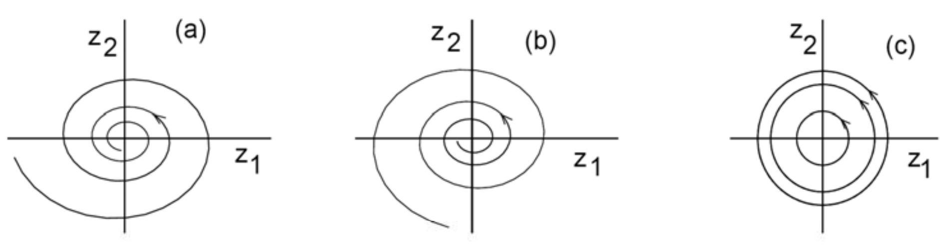
$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} \quad \text{and} \quad \theta(t) = \theta_0 + \beta t$$

$$\alpha < 0 \;\Rightarrow\; r(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

$$\alpha > 0 \;\Rightarrow\; r(t) \to \infty \text{ as } t \to \infty$$

$$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; r(t) \equiv r_0 \;\forall\, t$$

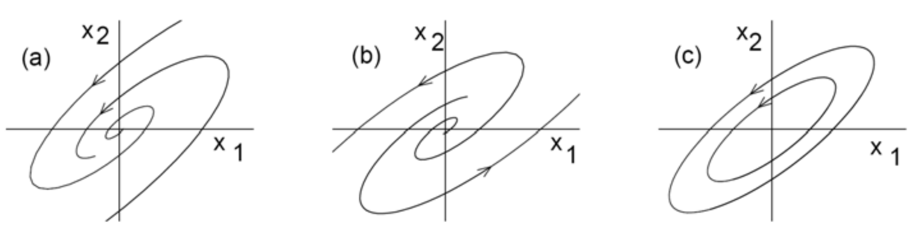
رفتار کیفی سیستمهای درجه دو



$\alpha < 0$ Stable Focus

$\alpha > 0$ Unstable Focus

$\alpha = 0$ Center



رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

Effect of Perturbations

$$A \to A + \delta A \quad (\delta A \text{ arbitrarily small})$$

The eigenvalues of a matrix depend continuously on its parameters

A node (with distinct eigenvalues), a saddle or a focus is structurally stable because the qualitative behavior remains the same under arbitrarily small perturbations in A

A stable node with multiple eigenvalues could become a stable node or a stable focus under arbitrarily small perturbations in A

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

A center is not structurally stable

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{Eigenvalues} = \mu \pm j$$

$$\mu < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Stable Focus}$$

$$\mu > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Unstable Focus}$$

رفتار کیفی سیستمهای درجه دو

اگر $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ خطی شده سیستم غیر خطی $\dot{\mathbf{x}}(t) = f\left(\mathbf{x}(t)\right)$ باشد

Eigenvalues of A	Type of equilibrium point of the nonlinear system
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Stable Node
$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$	Unstable Node
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Saddle
$\alpha \pm j\beta,\ \alpha < 0$	Stable Focus
$\alpha \pm j\beta,\ \alpha > 0$	Unstable Focus
$\pm j\beta$	Linearization Fails

تعریف نرم

- **تعریف نرم:** نرم بردار $\mathbf{v}$ اپراتوری است که دارای خواص زیر باشد:

$$\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$$

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \le \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$$

$$\|\mathbf{v}\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$$

- **نرم های مشهور:**
  - نرم منهتن
  - نرم اقلیدسی
  - نرم سوپریمم

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\left(|v_1|, \ldots, |v_n|\right)$$

تعاریف پایداری

سیستم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

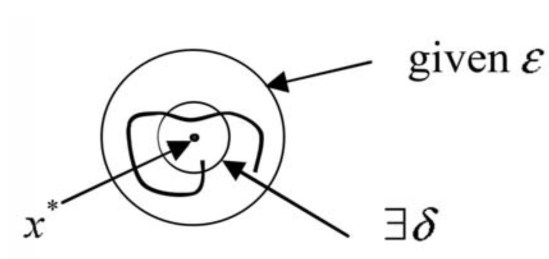
$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f\left(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t\right)$$

که پاسخ ورودی صفر آن به صورت $\dot{\mathbf{X}}(t) = f\left(\mathbf{X}(t), t\right)$ و $\mathbf{x}^*$
یک حالت تعادل سیستم ورودی صفر است.

تعاریف پایداری

- **پایداری لیاپانوف:** پاسخ $\mathbf{x}^*$ را به مفهوم لیاپانوف پایدار می گویند هرگاه:

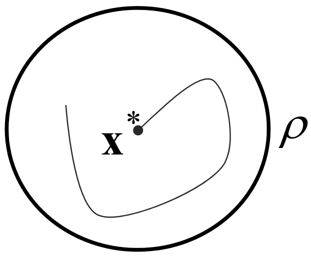
$$\forall t_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \left\| \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0) \right\| \le \delta \Rightarrow \left\| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t) \right\| \le \varepsilon$$



تعاریف پایداری

- **پایداری مجانبی:** پاسخ $\mathbf{x}^*$ را پایدار مجانبی می گویند هرگاه:

$$\forall t_0 \quad \exists \rho(t_0) > 0 : \quad \left\| \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0) \right\| \le \rho \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \left\| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t) \right\| = 0$$



- **تعریف:** بزرگترین محدوده پایداری مجانبی را حوزه جذب یا بستر جذب (domain of atrraction) می گویند.

تعاریف پایداری

- **پایداری مجانبی جامع:** اگر ناحیه جذب کل فضای R^n باشد، پاسخ را (سیستم را) پایدار مجانبی جامع می گویند.
  - لازمه پایداری مجانبی جامع آن است که سیستم فقط یک نقطه تعادل داشته باشد.
- برای سیستمهای LTI پایداری مجانبی جامع معادل پایداری داخلی است.
- **قضیه:** سیستم $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ پایدار مجانبی است اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

روش دوم لیاپانوف- مقدمات ریاضی

- **تعریف:** صورت درجه دوم یک چند جمله ای همگن حقیقی به صورت زیر است:

$$V(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$$

که به صورت ماتریسی زیر هم قابل نمایش است:

$$V(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}\mathbf{X}=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}=\langle \mathbf{X},\mathbf{A}\mathbf{X}\rangle$$

روش دوم لیاپانوف- مقدمات ریاضی

- **تعریف:** تابع $V(\mathbf{X})$ را در محدوده ای حول مبدا مثبت معین (positive definite) گویند هرگاه:

1. $V(\mathbf{X})$ و مشتقات جزئی آن مرتبه اول آن پیوسته باشند.
2. $\forall \mathbf{X}\neq 0,\quad V(\mathbf{X})>0$
3. $V(0)=0$

- **توجه:** اگر شرط ۲ به صورت $\geq$ باشند، تابع را مثبت نیمه معین (positive semi definite) گویند.

روش دوم لیاپانوف- مقدمات ریاضی

- **تعریف:** ماتریس $\mathbf{A}$ را مثبت معین (مثبت نیمه معین) گویند هرگاه:
  - تمام مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ مثبت (نا منفی) باشند

یا به طور معادل

  - کهادهای اصلی مقدم $\mathbf{A}$ مثبت (نا منفی) باشند:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \ldots$$

- **نکته:** اگر ماتریس $\mathbf{A}$ مثبت نیمه معین باشد، رتبه کامل نیست.

روش دوم لیاپانوف- مقدمات ریاضی

- **تعریف:** ماتریس $\mathbf{A}$ را منفی معین (منفی نیمه معین) گویند هرگاه:
  - تمام مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ منفی (نا مثبت) باشند

یا به طور معادل

  - برای کهادهای اصلی مقدم داشته باشیم:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \ldots$$

- **نکته:** ماتریس $\mathbf{A}$ منفی معین است اگر $-\mathbf{A}$ مثبت معین باشد.

روش دوم لیاپانوف- مقدمات ریاضی

- **مثال ۱:**

$$V(X) = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 2x_1x_3$$

- **مثال ۲:**

$$V(X) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

- **مثال ۳:**

$$V(X) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

روش دوم لیاپانوف

- **ایده:** مجموع انرژی یک سیستم پایدار با گذشت زمان رو به کاهش است.
  - برای پایداری به دنبال یک تابع انرژی میگردیم که مفهوم فوق را نشان دهیم.
- **قضیه پایداری مجانبی لیاپانوف:** یک سیستم با نقطه تعادل مبدا ($\mathbf{X}^* = 0$) را در نظر بگیرید. این سیستم در اطراف نقطه تعادل پایدار مجانبی است اگر تابع اسکالر $V(\mathbf{X})$ یافت شود به طوری که:
  - $V(\mathbf{X})$ مثبت معین باشد.
  - $\dot{V}(\mathbf{X})$ منفی معین باشد.

روش دوم لیاپانوف

- **مثال:**

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$V(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$\dot{V}(\mathbf{X}) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 < 1$$

$\dot{V}(\mathbf{X})$ داخل دایره واحد منفی معین است. پس تابعی یافت شد که در اطراف مبدا شرایط قضیه لیاپانوف را برآورده کند.

روش دوم لیاپانوف

- **پایداری مجانبی جامع:** سیستمی پایدار مجانبی جامع است که در تمامی فضای حالت شرایط پایداری مجانبی را برآورده کند، علاوه بر آن داشته باشیم:

$$if \quad \|\mathbf{X}\| \to \infty \quad then \quad V(\mathbf{X}) \to \infty$$ Radial unboundedness

مثال: تابع $V(\mathbf{X}) = \dfrac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$ شرط فوق را ندارد.

روش دوم لیاپانوف

- **نکته:** اگر بتوان نشان داد که حالتهایی که شرایط لیاپانوف را نقض می کنند (مثلا منفی بودن $\dot{V}(\mathbf{X})$ را)، روی مسیر حرکت سیستم قرار نمی گیرند، در این صورت پایداری پاسخ همچنان معتبر خواهد بود (قضیه لاسال)
- **مثال:**

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3$$

$$V(\mathbf{X}) = \tfrac{1}{2}(x_1^4 + 2x_1^2 + x_2^2)$$

روش دوم لیاپانوف

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = 2\dot{x}_1 x_1^3 + \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = -3x_2^2$$

منفی معین نیست چرا که در حالتهای غیر صفر $\mathbf{X} = (a \quad 0)^T$ ، صفر است.
ولی این حالتها روی مسیر حالت سیستم نیستند:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \underbrace{-2x_1 - 2x_1^3}_{const.} = k$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = kt = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_1(1 + x_1^2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

یعنی x_2 وقتی صفر می شود که قبلا x_1 صفر شده است.

روش دوم لیاپانوف

- **توجه:** اگر نتوانیم تابع لیاپانوف مناسب پیدا کنیم به معنی ناپایداری سیستم نیست.

- **قضیه ناپایداری لیاپانوف:** یک سیستم در محدوده ای در حول مبدا ناپایدار است اگر تابع پیوسته اسکالر $V(\mathbf{X})$ وجود داشته باشد که:

$$V(0)=0 \qquad V(\mathbf{X})\geq 0 \qquad \dot{V}(\mathbf{X})\geq 0$$

پایداری سیستمهای خطی

- سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{X}(t)$$

- برای سیستم خطی تابع لیاپانوف همواره به صورت زیر است:

$$V(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\dot{V}(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{X}$$

- برای اینکه $\dot{V}(\mathbf{X})$ منفی معین باشد، باید تابع $\mathbf{Q}$ زیر مثبت معین باشد:

$$\mathbf{Q}=-(\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A})$$

معادله لیاپانوف

پایداری سیستمهای خطی

- برای بررسی پایداری سیستمهای خطی یک ماتریس $\mathbf{Q} > 0$ انتخاب می کنیم و یک ماتریس $\mathbf{P}$ متقارن از معادله لیاپانوف به دست می آوریم. اگر $\mathbf{P}$ مثبت شد سیستم پایدار و در غیر اینصورت ناپایدار است.
- **مثال:**

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X} \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{2\times 2} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.033 \\ -0.033 & 0.1556 \end{bmatrix}$$

سیستم پایدار است

پایداری سیستمهای خطی

- **قضیه:** یک کران بالا برای زمان نشست سیستم $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ به صورت زیر است:

$$t_{s(\max)} = \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1})}$$

- **مثال:** برای مثال قبل

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3.14 & 0.73 \\ 0.73 & 6.58 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = 3.25, \quad 6.75$$

$$t_{s(\max)} = \frac{1}{3.25} = 0.308 \ \sec$$