سیستمهای کنترل مدرن

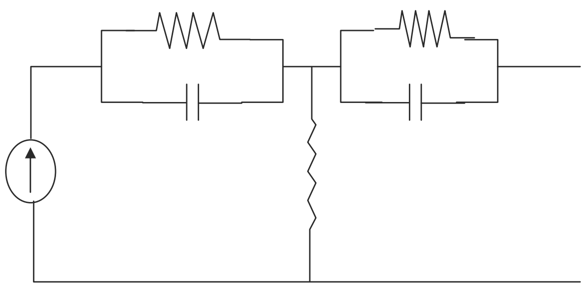
فصل چهارم: کنترل پذیری و رویت پذیری

مدرس:

دکتر عادل اکبری مجد

مدهای پنهان

- **مثال:**
  - مدار زیر دارای دو مد است.



  - تابع انتقال:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)} = R$$

  - مدهای پنهان ⟵ رویت پذیری و کنترل پذیری

تجزیه کالمن

- مثال:

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 0 & 0\\ -2 & -2 & -4 & 0\\ -2 & -2 & -2 & -5\end{bmatrix}\mathbf{X}(t)+\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\\ -1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}7 & 6 & 4 & 2\end{bmatrix}\mathbf{X}(t)$$

$$g(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

تجزیه کالمن

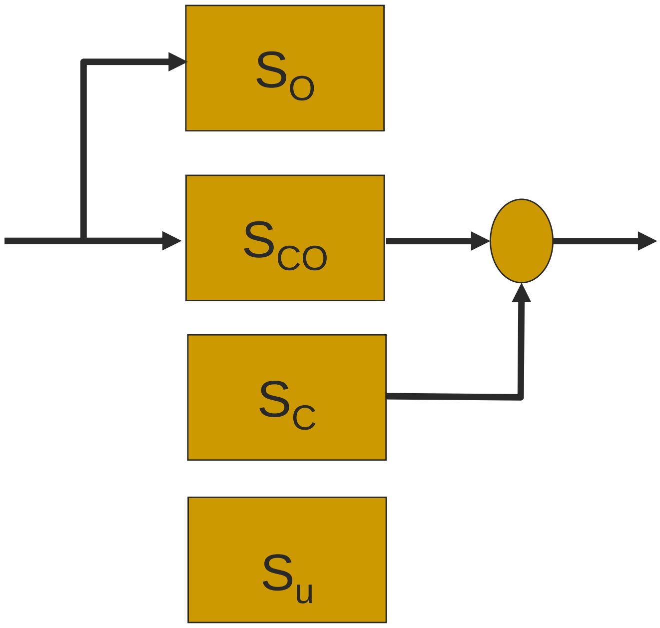
- قطری سازی مثال قبل:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\mathbf{Z}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{Z}(t)$$

تفکیک مدهای رویت پذیر و کنترل پذیر

تجزیه کالمن



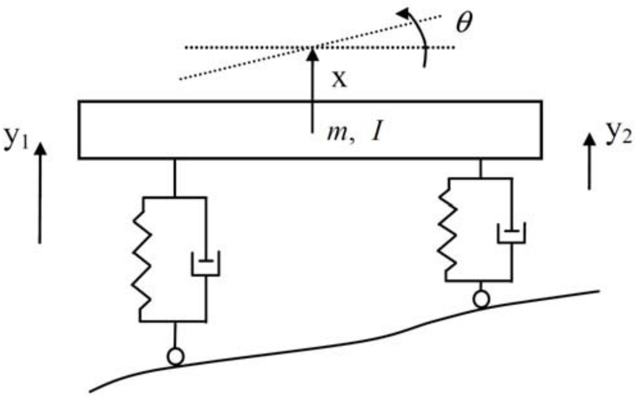
دلایل وجود سیستمهای رویت ناپذیر و کنترل ناپذیر

- انتخاب نامناسب متغیرهای خروجی ها و ورودی ها
    - انتخاب نادرست:

$$Y = x$$
$$u = F$$

    - انتخاب درست:

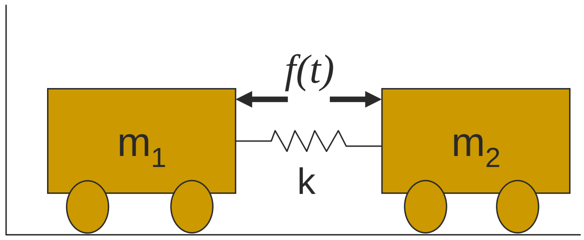
$$Y = [y_1, y_2]^T$$
$$u = [d_1, d_2]^T$$



$$\mathbf{X} = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$$

دلایل وجود سیستمهای رویت ناپذیر و کنترل ناپذیر

- ساختار سیستم



$$\mathbf{X}=[x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2]^T$$

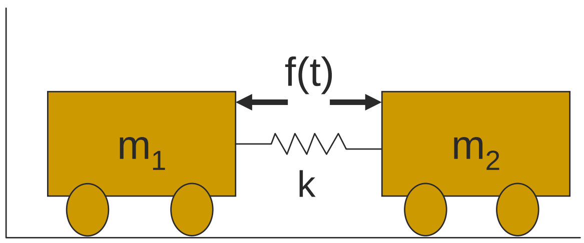
- از سطر سوم و چهارم معادلات مقابل:

$$\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\\frac{-k}{m_1}&\frac{k}{m_1}&0&0\\\frac{k}{m_2}&-\frac{k}{m_2}&0&0\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{-1}{m_1}\\\frac{1}{m_2}\end{bmatrix}f$$

$$\frac{m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2}{m_1+m_2}=0$$

یعنی مرکز ثقل جسم ثابت است.

دلایل وجود سیستمهای رویت ناپذیر و کنترل ناپذیر



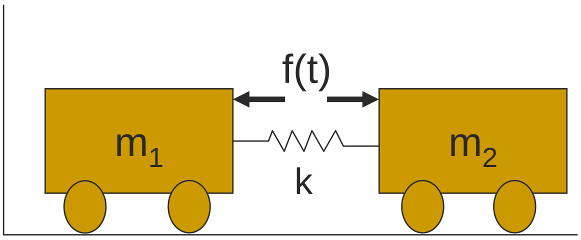
- تغییر متغیر:

$$x_c=\tfrac{m_1}{m}x_1+\tfrac{m_2}{m}x_2$$
$$\delta=x_1-x_2$$
$$\dot{x}_c=\tfrac{m_1}{m}\dot{x}_1+\tfrac{m_2}{m}\dot{x}_2$$
$$\delta=\dot{x}_1-\dot{x}_2$$

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}x_c\\\delta\\\dot{x}_c\\\delta\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{m_1}{m}&\frac{m_2}{m}&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&\frac{m_1}{m}&\frac{m_2}{m}\\0&0&1&-1\end{bmatrix}}_{T^{-1}}\mathbf{X}$$

دلایل وجود سیستمهای رویت ناپذیر و کنترل ناپذیر

- تبدیل همانندی



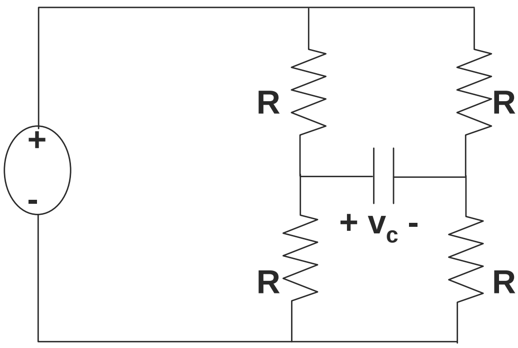
$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$$

- مد Z_3 کنترل ناپذیر است.

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{k}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}} \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} f$$

دلایل وجود سیستمهای رویت ناپذیر و کنترل ناپذیر

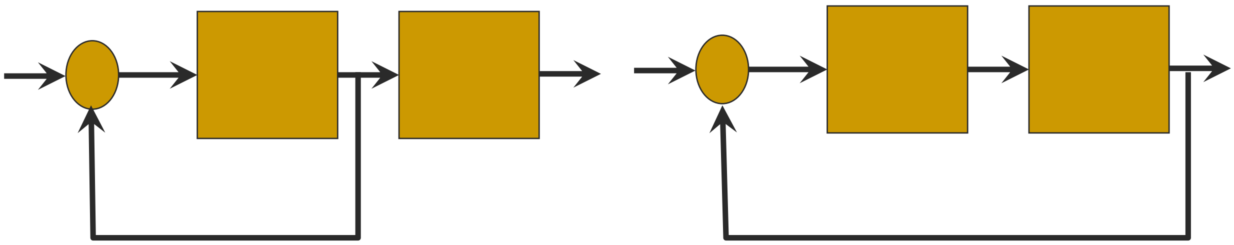
- **ساختار سیستم (تقارن)**
  - معادله حالت:



$$\dot{v}_c = -\frac{1}{RC} v_c$$

دلایل وجود سیستمهای رویت ناپذیر و کنترل ناپذیر

- فیدبک نگرفتن از برخی حالتها عامل رویت ناپذیری



روِیت ناپذیز

می تواند رویت پذیر باشد

- مثال: عدم امکان کنترل زاویه با فیدبک سرعت

قضایای کنترل پذیری

- **قضیه:** سیستم $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ کاملا کنترل پذیرحالت است اگر ستونهای ماتریس کنترل پذیری زیر:

$$\mathbf{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

فضای n بعدی را اسپن کنند یا به طور معادل $\mathbf{\Phi}_c$ رتبه کامل باشد.

- برهان

- **قضیه:** سیستم $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ کنترل ناپذیر است اگر بردار ویژه $\mathbf{w}_i$ از $\mathbf{A}^T$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbf{B}^T\mathbf{w}_i = 0$. در اینصورت مود متناظر با $\mathbf{w}_i$ مود کنترل ناپذیر سیستم است.

قضایای کنترل پذیری

- مثال:

$$\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{\Phi}_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

$rank[\mathbf{\Phi}_c]=3$ سیستم کنترل پذیر است

قضایای کنترل پذیری

- مثال:

$$\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{\Phi}_c=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$rank[\mathbf{\Phi}_c]=1$ سیستم کنترل پذیر نیست

$$\det(\lambda I-A^T)=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=-1,\; \lambda_2=-2 \qquad \mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}^T\mathbf{w}_1\neq 0$ مود 1-کنترل پذیر است

$\mathbf{B}^T\mathbf{w}_2=0$ مود 2-کنترل پذیر نیست

قضایای کنترل پذیری

- **قضیه:** حالت $\overline{\mathbf{X}}$ را کنترل ناپذیر می گوییم اگر پاسخ حالت صفر سیستم در همه زمانها و به ازای همه ورودیها بر $\overline{\mathbf{X}}$ عمود باشد.

$$\overline{\mathbf{X}}^T \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(t-\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} \overline{\mathbf{X}}^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(t-\tau)d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\mathbf{X}}^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{X}}^T \mathbf{\Phi}_c = 0$$

  - مثال: در مثال قبل

$$\overline{\mathbf{X}}^T = \begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0$$

قضایای کنترل پذیری

- **قضیه:** حالت $\overline{\mathbf{X}}$ را کنترل ناپذیر می گوییم اگر پاسخ ورودی صفر سیستم در همه زمانها و به ازای همه ورودیها بر $\overline{\mathbf{X}}$ عمود باشد.

$$\overline{\mathbf{X}}^T \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(t-\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} \overline{\mathbf{X}}^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(t-\tau)d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\mathbf{X}}^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{X}}^T \mathbf{\Phi}_c = 0$$

  - مثال: در مثال قبل

$$\overline{\mathbf{X}}^T = \begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0$$

زیرفضای کنترل پذیر

- برای تفکیک زیرفضای کنترل پذیر از زیرفضای کنترل ناپذیر ماتریس همانندی زیر را تشکیل می دهیم:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

که در آن

- $\mathbf{T}_1$: بردارهای ستونی که زیرفضای کنترل پذیر را اسپن می کنند.
- $\mathbf{T}_2$: بردارهایی که در کنار $\mathbf{T}_1$ یک ماتریس ناویژه تشکیل می دهند.

زیرفضای کنترل پذیر

- با انتخاب این ماتریس تبدیل و با توجه به:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$$

به دست می آوریم:

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{Z}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(t) \\ \mathbf{Z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} U(t)$$

- $\mathbf{Z}_2(t)$ حالتهای کنترل ناپذیر است و اگر $\mathbf{A}'_{22}$ پایدار باشد، سیستم پایدارپذیر است.

زیرفضای کنترل پذیر

- مثال:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & -6\\ 1 & 1 & -11\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

زیرفضای کنترل پذیر

- مثال:

$$\mathbf{A}'=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -6 & 0\\ 1 & -5 & 1\\ \hline 0 & 0 & -1\end{array}\right],\qquad \mathbf{B}'=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}=\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hline 0\end{array}\right]$$

مودهای کنترل پذیر: -2, -3

مود کنترل ناپذیر: -1 سیستم پایدارپذیر

رویت پذیری

- **تعریف:** سیستم $\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{AX}(t)+\mathbf{BU}(t)$, $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{CX}(t)$ را کاملا رویت پذیر (حالت) می گویند اگر زمان $t_1<\infty$ وجود داشته باشد که

$$\mathbf{Y}(t;t_0,\mathbf{X}_0,\mathbf{U})=\mathbf{Y}(t;t_0,\mathbf{X}'_0,\mathbf{U})$$

برای همه $\mathbf{U}(t): t_0<t<t_1$ ایجاب کند که

$$\mathbf{X}_0=\mathbf{X}'_0$$

یعنی بتوان حالت اولیه را با مشاهده خروجی در زمان محدود تعیین کرد.

قضایای رویت پذیری

- **قضیه:** سیستم $(\mathbf{A},\mathbf{C})$ کاملا رویت پذیر است اگر بردارهای سطری ماتریس رویت پذیری:

$$\mathbf{\Phi}_o=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}$$

فضای n بعدی را اسپن کنند یا به طور معادل $\mathbf{\Phi}_o$ رتبه کامل باشد.

  - برهان

- **قضیه:** سیستم $(\mathbf{A},\mathbf{C})$ رویت ناپذیر است اگر بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ از $\mathbf{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbf{Cv}_i^T=0$. در اینصورت مود متناظر با $\mathbf{v}_i$ رویت ناپذیر است.

قضایای رویت پذیری

- مثال:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 5\\ -1 & 1 & -5\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_o=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ 4 & -4 & -4\end{bmatrix}$$

$rank[\mathbf{\Phi}_o]=2$ سیستم رویت ناپذیر

قضایای رویت پذیری

- مثال:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 5\\ -1 & 1 & -5\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-6$$

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-3\\ 4\\ 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ -4\\ 5\end{bmatrix}$$

مدهای
-1 , -6
رویت ناپذیرند

$$\mathbf{Cv}_1^T\neq 0,\quad \mathbf{Cv}_2^T=0,\quad \mathbf{Cv}_3^T=0$$

قضایای رویت پذیری

- قضیه: حالت $\overline{\mathbf{X}}$ رویت ناپذیر است اگر پاسخ ورودی صفر سیستم به ازای حالت اولیه $\overline{\mathbf{X}}$ در همه زمانها صفر باقی بماند.

$$\mathbf{Y}(t \mid \mathbf{X}_0 = \overline{\mathbf{X}}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\overline{\mathbf{X}} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{\Phi}_o \overline{\mathbf{X}} = 0$$

- مثال: در مثال قبل

$$\mathbf{\Phi}_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad \mathbf{\Phi}_o \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

زیرفضای رویت پذیر

- برای تفکیک زیرفضای رویت پذیر از زیرفضای رویت ناپذیر ماتریس همانندی زیر را تشکیل می دهیم:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

که در آن

- $\mathbf{T}_1$: بردارهای سطری که زیرفضای رویت پذیر را اسپن می کنند.
- $\mathbf{T}_2$: بردارهایی که در کنار $\mathbf{T}_1$ یک ماتریس ناویژه تشکیل می دهند.

زیرفضای رویت پذیر

- با انتخاب این ماتریس تبدیل و با توجه به:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{TB}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{CT}^{-1}$$

به دست می آوریم:

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{Z}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'_{21} & \mathbf{A}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(t) \\ \mathbf{Z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{B}'_2 \end{bmatrix} \mathbf{U}(t)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}'_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(t) \\ \mathbf{Z}_2(t) \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{Z}_2(t)$ حالتهای کنترل ناپذیر است و اگر $\mathbf{A}'_{22}$ پایدار باشد، سیستم آشکارپذیر است.

زیرفضای رویت پذیر

- مثال:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

زیرفضای رویت پذیر

- مثال:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1} = \left[\begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -5 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{CT}^{-1} = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

مود رویت پذیر: 2

مودهای رویت ناپذیر: 1-و6- سیستم آشکارپذیر

دوگانی

- **تعریف:** برای سیستم

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{BU}(t)$$
$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{CX}(t)$$

سیستم دوگان به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{X}'(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{U}'(t)$$
$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{X}'(t)$$

دوگانی

- **تعریف:** برای سیستم

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{BU}(t)$$
$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{CX}(t)$$

سیستم دوگان به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{X}'(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{U}'(t)$$
$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{X}'(t)$$

دوگانی

- **لم:** اگر برای یک سیستم ماتریسهای رویت پذیری و کنترل پذیری را با $\mathbf{\Phi}_c, \mathbf{\Phi}_o$ و برای سیستم دوگان ماتریسهای رویت پذیری و کنترل پذیری را با $\mathbf{\Phi}'_c, \mathbf{\Phi}'_o$ نشان دهیم، داریم:

$$\mathbf{\Phi}'_c = \mathbf{\Phi}_o^T \qquad \mathbf{\Phi}'_o = \mathbf{\Phi}_c^T$$

  - برهان

- **قضیه:** یک سیستم کنترل پذیر (رویت پذیر) است اگر و تنها اگر دوگان آن رویت پذیر (کنترل پذیر) باشد.
- **قضیه:** یک سیستم پایدار پذیر (آشکارپذیر) است اگر و تنها اگر دوگان آن آشکارپذیر (پایدارپذیر) باشد.

کنترل پذیری خروجی

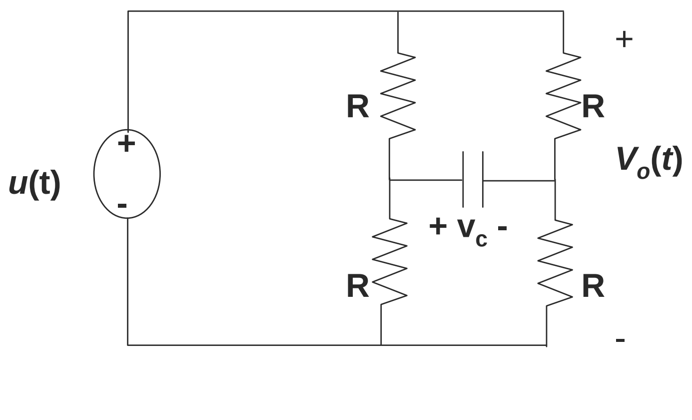
- **تعریف:** یک سیستم را کنترل پذیر خروجی می نامند اگر بتوان یک بردار ورودی غیرمقید $\mathbf{U}(t)$ را به گونه ای ساخت که خروجی اولیه سیستم $\mathbf{Y}(t_0)$ را به هر خروجی نهایی $\mathbf{Y}(t_f)$ در زمان محدود $t_f - t_0$ برساند.

- **قضیه:** سیستم $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ با l خروجی کنترل پذیر خروجی است اگر و تنها اگر رتبه ماتریس کنترل پذیری خروجی زیر برابر l باشد.

$$\Phi_{op} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

کنترل پذیری خروجی

- مثال:



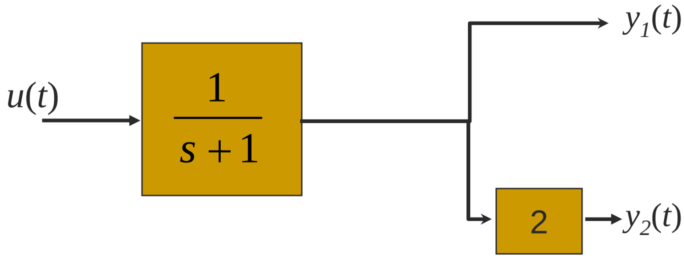
$$\dot{v}_c(t) = -\frac{1}{RC} v_c(t)$$
$$v_o(t) = u(t)$$

$$\mathbf{\Phi}_{op} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سیستم کنترل پذیر خروجی است ولی کنترل پذیر حالت نیست

کنترل پذیری خروجی

- مثال:



$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\mathbf{\Phi}_{op} = [\mathbf{CB} \quad \mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}_c = \mathbf{B} = 1$$

سیستم کنترل پذیر خروجی نیست ولی کنترل پذیر حالت است

- **نتیجه:** کنترل پذیری خروجی و کنترل پذیری حالت از هم نتیجه نمی شوند.

کنترل پذیری تابعی

- **تعریف:** یک سیستم با m ورودی و l خروجی و ماتریس تابع تبدیل $\mathbf{G}(s)$ را کنترل پذیر تابعی گویند اگر

$$rank\{\mathbf{G}(s)\} = l$$

- مثال:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{3}{s+2} & \frac{6}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

کنترل پذیر
تابعی نیست

- **نکته:** کنترل پذیری تابعی و کنترل پذیری حالت از هم نتیجه نمی شوند.