سیتمهای کنترل مدرن

فصل دوم: مدلسازی

مدرس:
دکتر عادل اکبری مجد

رویکردهای مدلسازی

- مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی
  - کلاسیک: تابع انتقال
  - مدرن: معادلات حالت (کالمن)

- شناسایی سیستم

نمایش سیستمها

- اگر پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $\delta(t-t_i)$ برابر $g(t,t_i)$ باشد، خروجی این سیستم به ورودی $u(t)$ برای $t>t_0$ به صورت زیر به دست می آید:

$$y(t)=f\left(u(t),t\right)=\int_{t_0}^{t} g(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

- اگر سیستم نا متغیر با زمان هم باشد داریم:

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

که در آن $g(t)$ پاسخ ضربه سیستم است.

تابع انتقال

- تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه را تابع انتقال می گویند.

$$g(s)=\mathbf{L}\left[g(t)\right] \quad ; \quad y(s)=g(s)u(s)$$

- تابع انتقال سیستم p ورودی، q خروجی:

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \qquad \mathbf{G}(s)=\begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1p}(s) \\ g_{21}(s) & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_{q1}(s) & & \cdots & g_{qp}(s) \end{pmatrix}$$

معادلات حالت

- اگر متغیرهای حالت یک سیستم متناهی باشد (lumped) در این صورت می توان آنرا به صورت معادلات حالت توصیف کرد.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f\left(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t\right)$$
$$\mathbf{Y}(t) = g\left(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t\right)$$

  - اگر سیستم خطی باشد:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t)$$
$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t)$$

  - اگر سیستم خطی نا متغیر با زمان باشد:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)$$
$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t)$$

معادلات حالت

- **نکات:**

۱. حالتها می توانند متغیرهای فیزیکی یا ریاضی باشند.
۲. توصیف حالت سیستم منحصر به فرد نیست.
۳. حالتها باید مستقل از هم باشند.
۴. بُعد بردار حالت را بعد سیستم می گویند.

- رابطه تابع انتقال و معادلات حالت
  - بازسازی (reconstruction):

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

  - تحقق (realization):

????

مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی: مدار الکتریکی

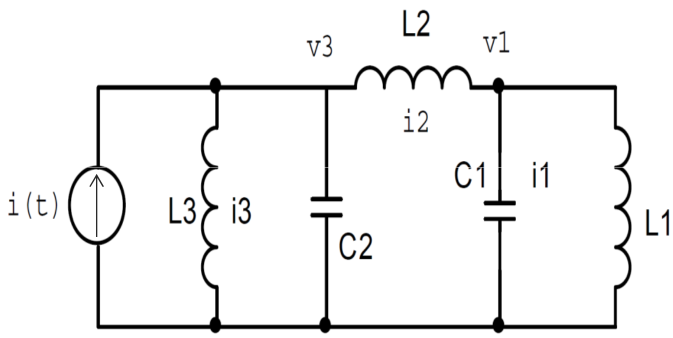
$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + v_1(t)$$

$$v_2(t) = L_3 \frac{di_3}{dt}$$

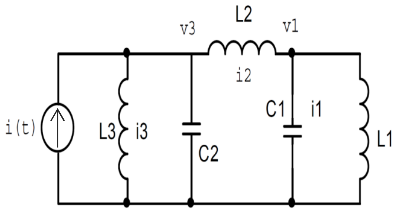
$$i_2(t) = c_1 \frac{d}{dt} v_1(t) + i_1(t)$$

$$i(t) = i_3(t) + C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) + i_2(t)$$



- جریان سلفها به هم وابسته است: $L_3 i_3(t) = L_2 i_2(t) + L_1 i_1(t)$

مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی: مدار الکتریکی

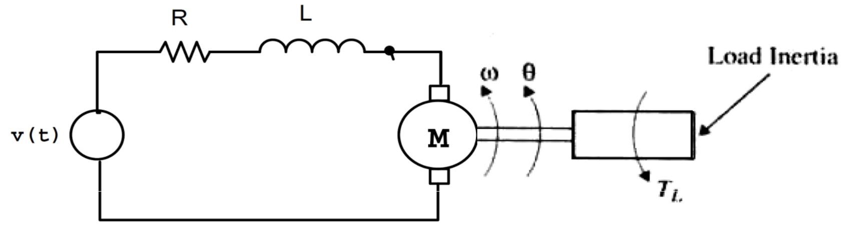


- با انتخاب $x_1(t) = v_1(t)$, $x_2(t) = v_2(t)$, $x_3(t) = i_1(t)$, $x_4(t) = i_2(t)$ به دست می آوریم:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

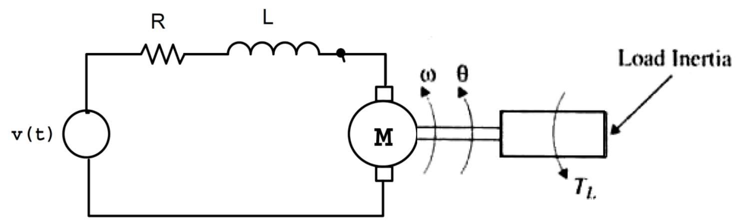
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی: سروموتور



$$T(t) = K_a i_a(t)$$
$$E_{emf}(t) = K_b \omega(t)$$
$$\mathrm{v}(t) - E_{emf}(t) = R i_a(t) + L\frac{di_a(t)}{dt}$$
$$T(t) - T_L(t) - \nu\omega(t) = J\dot{\omega}(t)$$
$$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

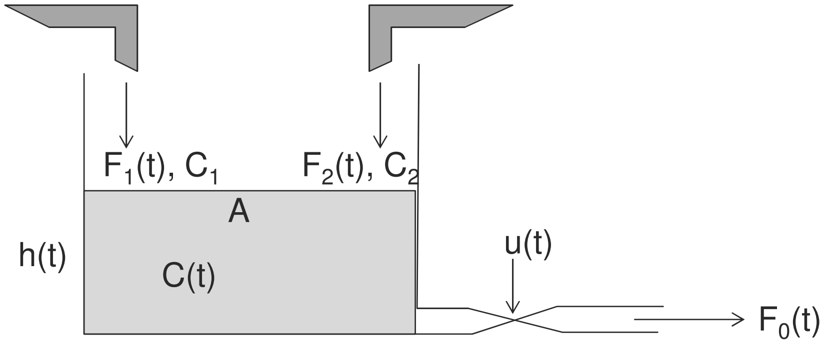
مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی: سروموتور



- با انتخاب $x_1(t) = i_a(t), \quad x_2(t) = \omega(t), \quad x_3(t) = \theta(t)$ به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} & 0 \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{\nu}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}(t) \\ T_L(t) \end{bmatrix}$$

مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی: مخزن اختلاط

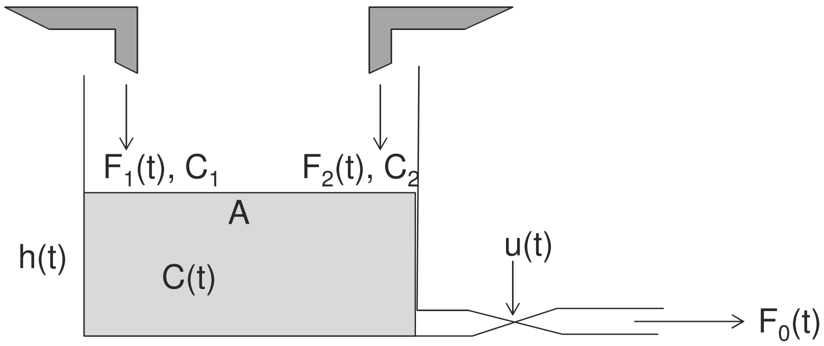


$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - F_0(t)$$

$$\frac{d}{dt}\big(V(t)C(t)\big) = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C(t)F_0(t)$$

$$F_0(t) = ku(t)\sqrt{h(t)}, \quad k \propto \sqrt{\rho g}$$

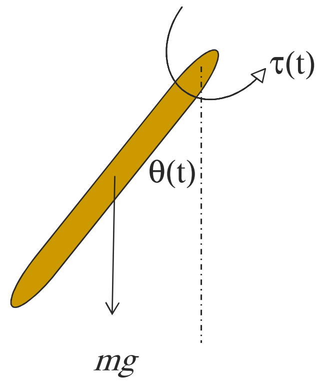
مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی: مخزن اختلاط



$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(F_1(t) + F_2(t) - Ku(t)\sqrt{h(t)}$$

$$\dot{C}(t) = \frac{1}{Ah(t)}\big(F_2(t)C(t) + F_1(t)C(t) + C_1F_1(t) - C_2F_2(t)\big)$$

مدلسازی بر اساس اصول فیزیکی: آونگ فعال



$$\tau(t) + mg\frac{l}{2}\sin\theta(t) - b\dot{\theta}(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

- با انتخاب $x_1(t) = \dot{\theta}(t), \quad x_2(t) = \theta(t)$ داریم:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{b}{J}x_1(t) + \frac{mgl}{2J}\sin x_2(t) + \frac{1}{J}\tau(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

نقطه تعادل و نقطه کار

- برای یک سیستم با معادلات

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))$$
$$\mathbf{Y}(t) = g(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))$$

  - نقطه تعادل: $\mathbf{0} = f(\mathbf{X}^*, \mathbf{0})$
  - نقطه کار (نقطه تعادل با ورودی):

$$0 = f(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$$
$$\mathbf{Y}^* = g(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$$

نقطه تعادل و نقطه کار

- مثال:

$$\dot{x}_1(t) = \left(x_1(t)\right)^2 - 2x_1(t)x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) - 1$$
$$y(t) = x_1(t) + \sqrt{u(t)}$$

  - نقاط تعادل: $\mathbf{X}^* = (2 \quad 1)$ $\quad \mathbf{X}^* = (0 \quad -1)$
  - نقطه کار برای $y^* = 5$: $u^* = (\frac{15}{8})^2$ $\quad \mathbf{X}^* = (\frac{25}{8} \quad \frac{17}{8})$

- مثال: آونگ فعال

شناسایی سیستم: انتخاب مدل

- انتخاب مدل:

$$\hat{y}(t) = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \dots \quad \varphi_n(t)][\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n]^T$$
$$= \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta}$$

  - $\varphi_i(t)$ها: رگرسور (توابعی از ورودیها . خروجیهای گذشته)
  - θ_iها: پارامترهای تخمین

- مثالها:

$$\hat{y}(t) = \theta_1 u(t) + \theta_2 \left(u(t)\right)^2$$
$$\hat{y}(t) = \theta_1 u(t) + \theta_2 u(t-1) + \theta_3 u(t-3)$$
$$\hat{y}(t) = \theta_1 y(t-1) + \theta_2 u(t-1)$$

شناسایی سیستم: تخمین حداقل مربعات

- تابع هدف:

$$\mathbf{Y}(t) = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(t)]^T$$

$$\hat{\mathbf{Y}}(t) = [\hat{y}(1) \quad \hat{y}(2) \quad \dots \quad \hat{y}(t)]^T$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)$$

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \quad V(t,\boldsymbol{\theta}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t) = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\left(\mathbf{Y}(i) - \hat{\mathbf{Y}}(i)\right)^2$$

- پاسخ:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = (\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_t]$$

شناسایی سیستم: تخمین حداقل مربعات

- مثال:

$$\hat{y}(t) = \theta_1 y(t-1) + \theta_2 u(t-1) + \theta_3 u(t)$$

t	0	1	2	3	4	5	6
u(t)	0	0.33	0.66	1	1	1	1
Y(t)	0	0.25	0.64	1.15	1.08	1.02	1.02

$$\Phi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y(t-1) & u(t-1) & u(t) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.33 \\ 0.25 & 0.33 & 0.66 \\ 0.64 & 0.66 & 1.00 \\ 1.15 & 1.00 & 1.00 \\ 1.08 & 1.00 & 1.00 \\ 1.02 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t=1 \\ t=2 \\ t=3 \\ t=4 \\ t=5 \\ t=6 \end{array} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.64 \\ 1.15 \\ 1.08 \\ 1.02 \\ 1.02 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = (\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -0.0247 \\ 0.098 \\ 0.9891 \end{bmatrix}$$

شناسایی سیستم: حداقل مربعات

- حداقل مربعات وزن دار
  - تابع هدف: $\min\limits_{\boldsymbol{\theta}} \quad V(t,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T\mathbf{w}\mathbf{e}$
  - پاسخ: $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = (\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{w}\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{w}\mathbf{Y}$
- نکته: ماتریس $(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1}$ یا $(\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{w}\boldsymbol{\Phi})^{-1}$ را ماتریس کوواریانس می گویند.
- نکته: معکوس پذیر بودن کوواریانس را شرط تحریک می گویند.

شناسایی سیستم: حداقل مربعات بازگشتی

- در اکثر موارد کاربردی شناسایی به صورت online مد نظر است.
  - معادلات حداقل مربعات بازگشتی RLS:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \mathbf{K}(t)\left(\mathbf{Y}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)\right)$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)\left(I + \boldsymbol{\varphi}(t)^T\mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)\right)^{-1}$$

$$\mathbf{P}(t) = \left(I - \mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)^T\right)\mathbf{P}(t-1)$$

شناسایی سیستم: حداقل مربعات بازگشتی

- مثال:

$$\hat{y}(t)=\theta_1 y(t-1)+\theta_2 u(t-1)+\theta_3 u(t)$$

t	0	1	2	3	4	5	6
u(t)	0	0.33	0.66	1	1	1	1
Y(t)	0	0.25	0.64	1.15	1.08	1.02	1.02

$t=1,\quad \mathbf{P}(0)=100,\quad \boldsymbol{\theta}(0)=[0.2\quad 0.3\quad 0.5]^T$

$$\mathbf{K}(1)=100[0\quad 0\quad 0.33]\left(1+[0\quad 0\quad 0.33]\times 100\times[0\quad 0\quad 0.33]^T\right)^{-1}=$$
$$[0\quad 0\quad 2.7754]^T$$

$$\mathbf{P}(1)=\left(1-[0\quad 0\quad 2.7754][0\quad 0\quad 0.33]^T\right)\times 100=8.41$$

$$\boldsymbol{\theta}(1)=[0.2\quad 0.3\quad 0.5]^T+[0\quad 0\quad 2.7754]^T\left(0.25-[0\quad 0\quad 0.33][0.2\quad 0.3\quad 0.5]^T\right)$$
$$=[0.2\quad 0.3\quad 0.7359]$$

شناسایی سیستم: حداقل مربعات بازگشتی

- مثال:

$$\hat{y}(t)=\theta_1 y(t-1)+\theta_2 u(t-1)+\theta_3 u(t)$$

t	0	1	2	3	4	5	6
u(t)	0	0.33	0.66	1	1	1	1
Y(t)	0	0.25	0.64	1.15	1.08	1.02	1.02

$t=2,\quad \mathbf{P}(1)=8.41,\quad \boldsymbol{\theta}(1)=[0.2\quad 0.3\quad 0.7359]^T$

$$\mathbf{K}(2)=8.41[0.25\quad 0.33\quad 0.66]\left(1+[0.25\quad 0.33\quad 0.66]\times 8.41\times[0.25\quad 0.33\quad 0.66]^T\right)^{-1}=$$
$$[0.3444\quad 0.4546\quad 0.9092]^T$$

$$\mathbf{P}(2)=\left(1-[0.3444\quad 0.4546\quad 0.9092][0.25\quad 0.33\quad 0.66]^T\right)\times 8.41=1.3776$$

$\boldsymbol{\theta}(2)=$

$$[0.2\quad 0.3\quad 0.7359]^T+[0.3444\quad 0.4546\quad 0.9092]^T\left(0.64-[0.25\quad 0.33\quad 0.66][0.2\quad 0.3\quad 0.7359]^T\right)$$
$$=[0.2018\quad 0.3024\quad 0.7407]$$

شناسایی سیستم: حداقل مربعات بازگشتی

- نکات:
  - عبارت $\mathbf{Y}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)$ تقریبی از خطای تخمین است.
  - اگر $\boldsymbol{\theta}$ به مقادیر واقعی میل کند: $\mathbf{e}\to 0$ و $\mathbf{K}\to 0$
  - اگر تخمین صرفا همگرا باشد: $\mathbf{K}\to 0$
  - ماتریس کوواریانس در ابتدا بزرگ است و با همگرا شدن الگوریتم کوچکتر می شود. بزرگ بودن این ماتریس با $tr(\mathbf{P})$ سنجیده می شود.
  - بزرگ بودن ماتریس نشان دهنده تغییرات زیاد روی پارامترها است.

شناسایی سیستم: فاکتور فراموشی

- اگر بعد از همگرایی، تغییراتی در پارامترها رخ دهد به دلیل کوچک شدن کوواریانس فهمیده نمی شود.
- راه حل:
  - بازنشانی کوواریانس
  - فاکتور فراموشی

$$V(\boldsymbol{\theta},t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}\left(\mathbf{Y}(i)-\hat{\mathbf{Y}}(i)\right)^2$$

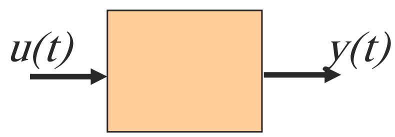
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)+\mathbf{K}(t)\left(\mathbf{Y}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)\right)$$

$$\mathbf{K}(t)=\mathbf{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)\left(\lambda\mathbf{I}+\boldsymbol{\varphi}(t)^T\mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)\right)^{-1}$$

$$\mathbf{P}(t)=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)^T\right)\frac{\mathbf{P}(t-1)}{\lambda}$$

شناسایی سیستم: سیستمهای دینامیکی خطی

- مدل سیستم دینامیکی

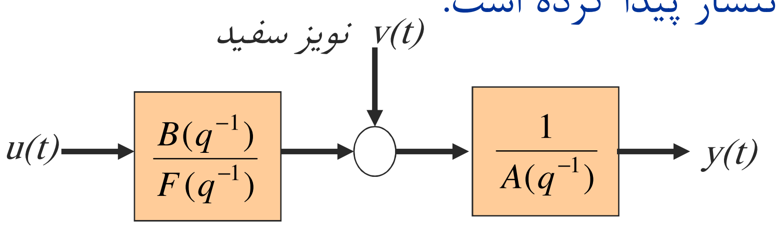


$$q^{-1}\{p(t)\} = p(t-1)$$

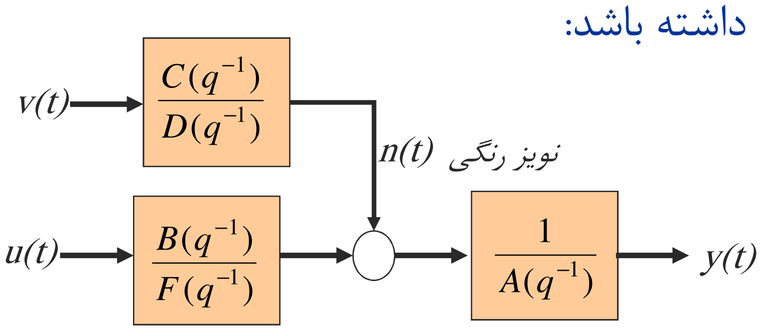
$$G(q^{-1}) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}} = \frac{B_d(q^{-1})}{A_d(q^{-1})}$$

شناسایی سیستم: سیستمهای دینامیکی خطی

- اثر نویز : اثر نویز را فقط در خروجی نمیتوان در نظر گرفت. چون نویز در در طول سیستم انتشار پیدا کرده است.

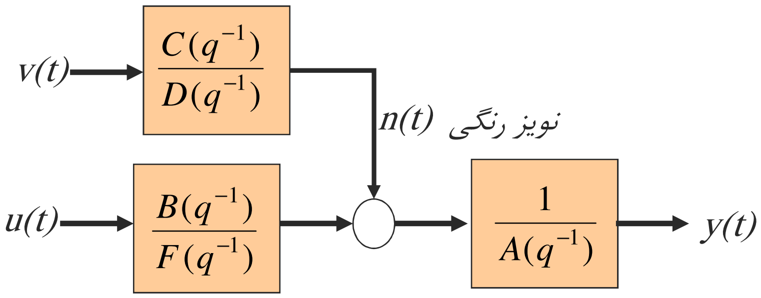


- اگر خود نویز دینامیک داشته باشد:



شناسایی سیستم: سیستمهای دینامیکی خطی

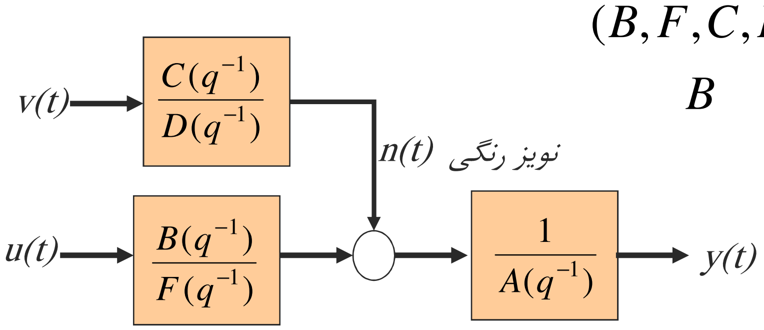
- اگر $A(q^{-1})=1$ یعنی نویز جمع پذیر با خروجی فرض شده است.
- اگر $\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}=1$ یعنی نویز سفید فرض شده است.
- اگر نویز نباشد سیستم قطعی (deterministic) است.
- اگر ورودی $u(t)$ وجود نداشته باشد، پیش بینی سری زمانی داریم.



شناسایی سیستم: سیستمهای دینامیکی خطی

- وضعیتهای مختلف مدل:

$$
\begin{array}{ccc}
(A,B,D) & \rightarrow & ARARX \\
(A,B) & \rightarrow & ARX \\
(A,B,C) & \rightarrow & ARMAX \\
(B,F) & \rightarrow & OE \\
(B,F,C,D) & \rightarrow & BJ \\
B & \rightarrow & FIR
\end{array}
$$



شناسایی سیستم: دینامیک سیستمهای خطی

- نکته ۱: نگاشت بین حوزه qو s (زمان نمونه برداری T)
  - روش تبدیل دوخطی $s = \frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}$
- نکته ۲: در تمامی کسرها، درجه صورت مساوی یا یکی کمتر از درجه مخرج انتخاب می شود.
- نکته ۳: برای در نظر گرفتن تاخیر نمونه گیری معمولا $b_0=0$ فرض می شود.
- نکته ۴: هم دینامیک سیستم و هم دینامیک نویز را از درجات پایین شروع می کنند و کم کم افزایش می دهند.

شناسایی سیستم: انتخاب سیگنال تحریک

- مثال: اگر به سیستم زیر فرکانسهای ۲ تا ۱۰۰۰ بدهیم هیچ مدی تحریک نمی شود.

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+1)(s+10^4)}} \longrightarrow$$

- ورودی های مناسب : ضربه و نویز سفید
  - مشکلات ساخت و تحمل فرکانس بالای سیستم.
- روشهای کاربردی تر: سینوسی با فرکانس متغیر و سیگنال PRBS

PRBS: Pseudo Random Binary Signal => پالس مربعی با عرض پالسهای متفاوت که عرض آنها یک فرآیند تصادفی با توزیع یکنواخت است.