آمار و احتمالات مهندسی

جلسه هشتم

متغیرهای تصادفی پیوسته

تفاوت متغیر تصادفی پیوسته با متغیر تصادفی ناپیوسته در دامنهٔ مقادیر ورودی آنها است. تکیه گاه متغیرهای تصادفی پیوسته زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی است. مانند میزان قد، وزن، فشار خون و...

در متغیرهای تصادفی پیوسته به جای عبارت **تابع احتمال** $\mathbf{F_x(x)}$ از لفظ یا عبارت **چگالی احتمال** $\mathbf{f_x(x)}$ استفاده می کنیم.

مقدار احتمال در اینجا نیز حتماً مقداری غیر منفی است. سایر خصوصیات تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته از قرار زیر است:

$$f_X(x) \geq 0, x \in R$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \quad \Leftarrow \quad P(X \leq x)$$

تابع توزیع — تابع چگالی

$$f_X(x) = dF_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

بود و نبود تساوی تفاوتی ندارد

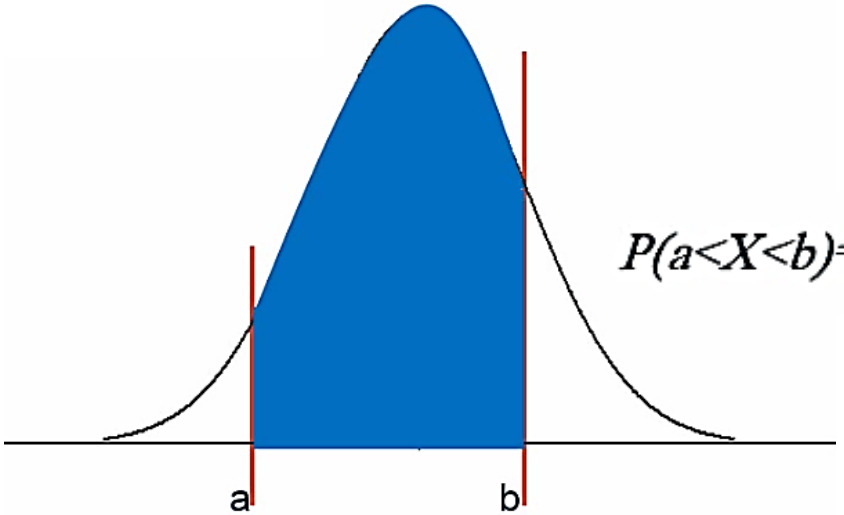
متغیرهای تصادفی پیوسته

امید ریاضی و **واریانس** متغیر تصادفی پیوسته:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\right)^2$$

در متغیر های تصادفی پیوسته مقدار احتمال از طریق محاسبهٔ مساحت زیر نمودار تابع چگالی احتمال بدست می آید.



$P(a<X<b)=F(b)-F(a)$

متغیرهای تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی یکنواخت (Continuous Uniform):

ساده ترین نوع توزیع احتمال پیوسته، توزیع یکنواخت است. بر اساس این توزیع، چنانچه بخواهیم عددی را بین فاصلهٔ (a, b) انتخاب نماییم، بینهایت عدد قابل انتخاب هستند.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in (a,b)$$

X~U(a,b)

انتخاب یک عدد تصادفی در فاصله a تا b

مثال: اگر X روی فاصلهٔ (0, 10) دارای توزیع یکنواخت پیوسته باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

(الف) $P(X<3)$ (ب) $P(X>6)$ (ج) $P(3<X<8)$

(الف)
$$P(X<3) = \int_0^3 \frac{1}{10}\,dx = \frac{3}{10}$$

(ب)
$$P(X>6) = 1 - P(X<6) = 1 - \int_0^6 \frac{1}{10}\,dx = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

(ج)
$$P(3<X<8) = \int_3^8 \frac{1}{10}\,dx = \frac{5}{10}$$

متغیرهای تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی یکنواخت (Continuous Uniform):

ساده ترین نوع توزیع احتمال پیوسته، توزیع یکنواخت است. بر اساس این توزیع، چنانچه بخواهیم عددی را بین فاصلهٔ (a, b) انتخاب نماییم، بینهایت عدد قابل انتخاب هستند.

امید ریاضی متغیر تصادفی یکنواخت، X~U(a,b)

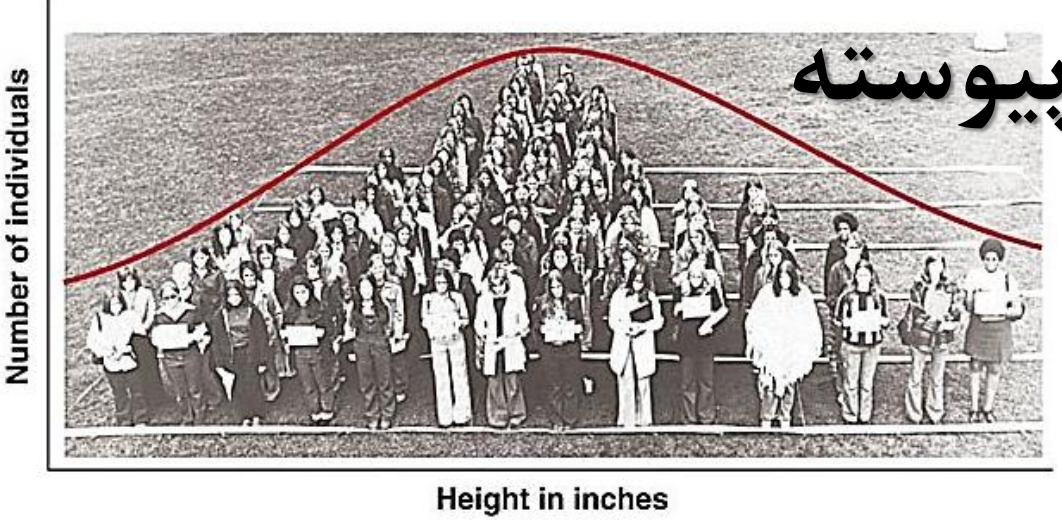
$$E(X)=\frac{b+a}{2}$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

اثبات امید ریاضی:

$$E(X)=\int_a^b x.f_x(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)=\frac{b+a}{2}$$

متغیرهای تصادفی پیوسته



متغیر تصادفی نرمال:

یکی از مهمترین توزیع ها در مباحث آماری است و کاربردهای بسیاری در تحقیقات پزشکی و مهندسی دارد. به تجربه ثابت شده است که در دنیای اطراف ما توزیع بسیاری از متغیرهای طبیعی از همین تابع پیروی می کنند. فرمول آن بر حسب دو پارامتر میانگین (μ) و انحراف از معیار(σ) بیان می شود.

مثلاً متغیرهای زیادی بر میزان خطای اندازه‌گیری یک کمیت اثر می گذارند، مانند خطای دید، خطای وسیله اندازه‌گیری، شرایط محیَط و غیره. ولی با اندازه‌گیری های متعدد، برآیند این خطاها صفر بوده و مقادیر خطاها با توزیع نرمال حول صفر پراکنده شده است. مثال‌های دیگری از این نوسان‌های طبیعی، طول **قد**، میزان **وزن** یا **بهرهٔ هوشی** افراد است.

متغیرهای تصادفی پیوسته

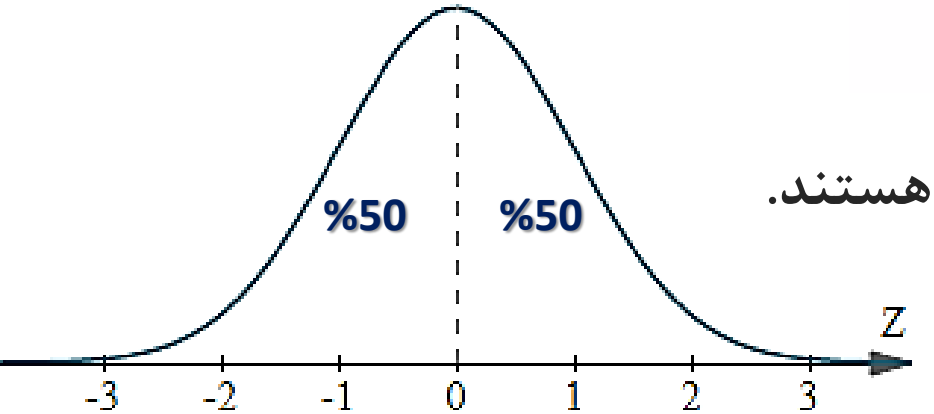
متغیر تصادفی نرمال:

- بیان بسیاری از پدیده‌های طبیعی به صورت متغیر تصادفی نرمال (متغیر تصادفی طبیعی)
- تکیه گاه، اعداد حقیقی $(-\infty,\infty)$
- تابع چگالی

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]}$$

پارامترهای توزیع، میانگین μ و واریانس σ^2

Bell Shape Distribution



$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

میانگین، میانه و مد هر سه بر هم منطبق هستند.

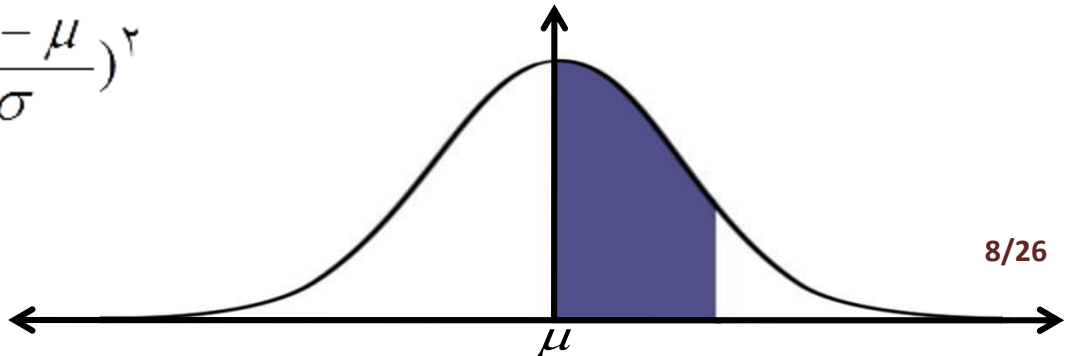
متغیرهای تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی نرمال یا توزیع گوسی (Gaussian Distribution):

این توزیع گاهی به دلیل استفاده کارل فردریک گاوس از آن در کارهای خود با نام توزیع یا تابع گوسی (گاوسی) نامیده می‌شود. همچنین به دلیل شکل این توزیع، با نام انحنای زنگوله‌ای(Bell Shaped) (زنگدیس) نیز معروف است.
تابع احتمال این توزیع دارای دو پارامتر است که یکی تعیین کننده مکان (μ) و دیگری تعیین کننده مقیاس (σ) توزیع هستند.
فرمول این تابع بر حسب، دو پارامتر میانگین و انحراف از معیار بیان می شود.
ضابطه تابع توزیع نرمال به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\ \sigma} . e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{۲}}$$

$$-\infty < x < +\infty$$



متغیرهای تصادفی پیوسته

ویژگی های توزیع نرمال:

۱- توزیعی است پیوسته که از منهای بینهایت تا مثبت بینهایت گسترده است.

۲- مساحت زیر منحنی نرمال برابر یک است. $P(-\infty < x < +\infty) = ۱$

۳- میانگین آن μ و انحراف از معیارآن σ است.

٤- توزیعی متقارن است در نتیجه ضریب چولگی آن صفر است.

٥- سه شاخص مهم مرکزی یعنی میانگین، میانه و نما بر هم منطبقند.

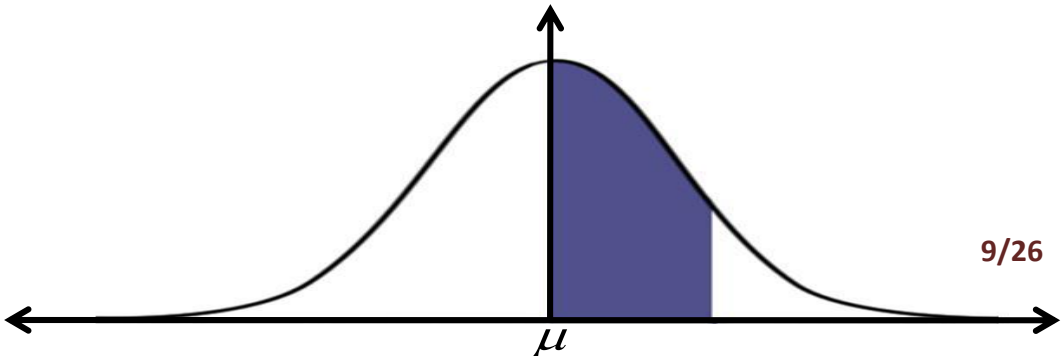
٦- محور تقارن آن میانگین (μ) است. به همین دلیل $P(x < \mu) = ۰/۵ = P(x > \mu)$

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\,\sigma} . e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{۲}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Note constants:

π=3.14159

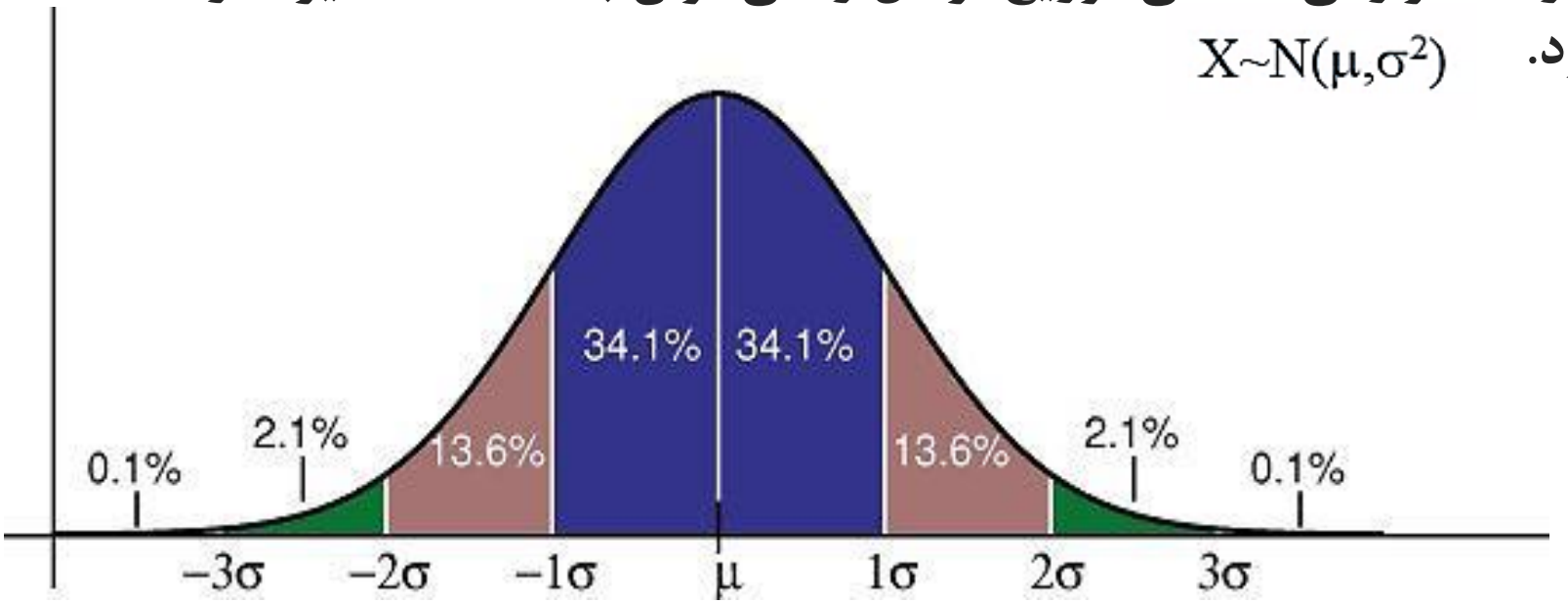
e=2.71828



متغیرهای تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی نرمال:

مقادیر درصد فراوانی منحنی توزیع نرمال را می توان به کمک مقادیر μ و σ دسته بندی کرد. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$



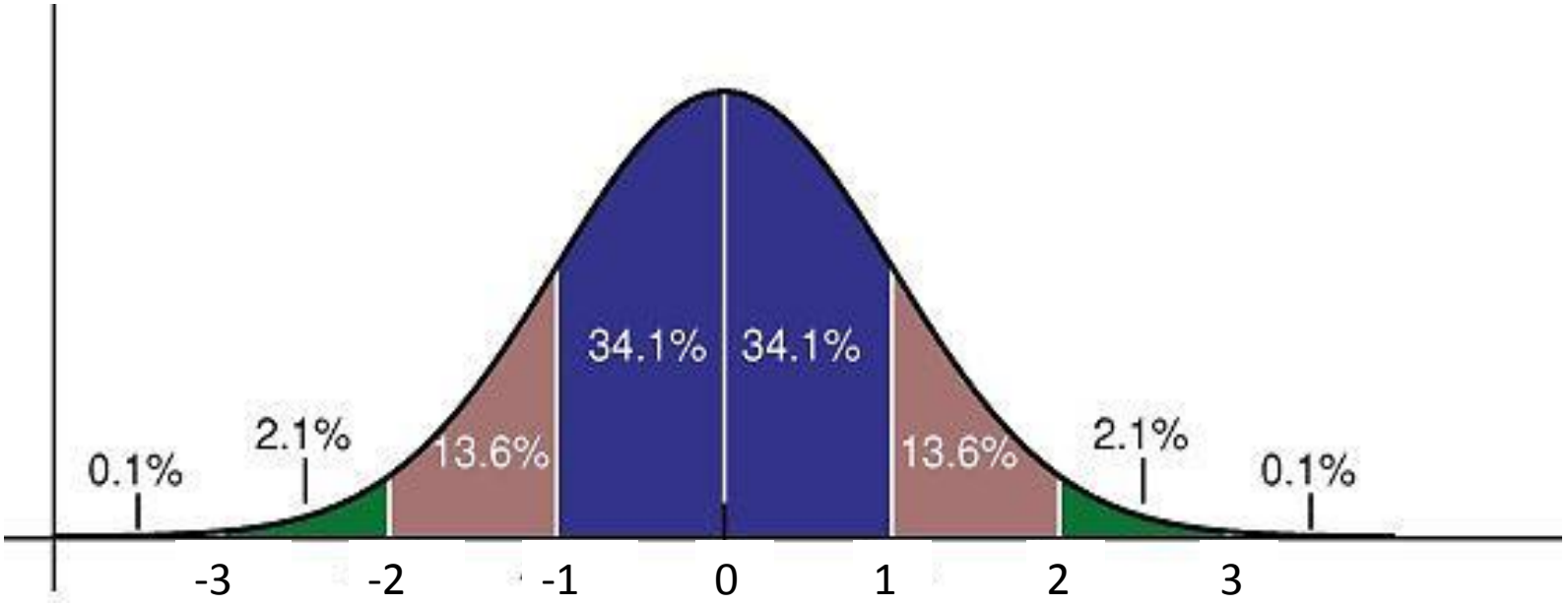
متغیر تصادفی نرمال استاندارد:

$Z \sim N(0,1)$ یک متغیر تصادفی نرمال خاص است که در آن مقدار $\mu=0$ و $\sigma=1$ می باشد.

متغیرهای تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی نرمال استاندارد: $Z \sim N(0,1)$

یک متغیر تصادفی نرمال خاص است که در آن مقدار $\mu=0$ و $\sigma=1$ می باشد.



متغیر تصادفی استاندارد

متغیر تصادفی ای که دارای میانگین (μ) صفر و انحراف از معیار (σ) ۱ باشد را متغیر تصادفی استاندارد می گویند.

اگر X متغیر تصادفی با میانگین μ_X و انحراف از معیار σ_X باشد، متغیر تصادفی Z که به صورت زیر تعریف می شود یک متغیر تصادفی استاندارد است:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

اثبات:

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{۱}{\sigma_X} E(X-\mu_X) = \frac{۱}{\sigma_X}(E(X)-\mu_X) = \frac{۱}{\sigma_X} \times ۰ = ۰$$

$$\sigma_Z^{۲} = E(Z^{۲}) - E^{۲}(Z) = E\left(\frac{(X-\mu_X)^{۲}}{\sigma_X^{۲}}\right) - ۰ = \frac{۱}{\sigma_X^{۲}} E(X-\mu_X)^{۲} = \frac{۱}{\sigma_X^{۲}} \times \sigma_X^{۲} = ۱$$

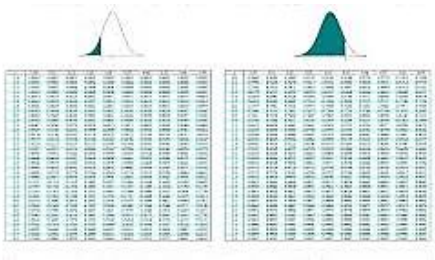
توزیع نرمال استاندارد

اگر X یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، احتمال اینکه $x \leq 1$ باشد را بدست آورید:

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \int_{-\infty}^{1} f_x(x).\,dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-X^2}{2}}.\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{\frac{-X^2}{2}}.\,dx$$

مقدار انتگرال $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{\frac{-X^2}{2}}.dx$ به ازای مقادیر مختلف **Z** محاسبه و در جدولی آمده است که با استفاده از آن بدست می آوریم:



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{\frac{-X^2}{2}}.\,dx = 0.8413$$

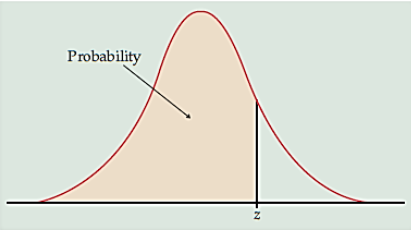


TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

توزیع نرمال استاندارد

می توان احتمالات هر توزیع نرمال دیگری را با استاندارد کردن و به کمک تغییر متغیر z از جداول نرمال استاندارد به دست آورد.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

در توزیع نرمال استاندارد می توان از قواعد زیر برای محاسبه احتمالات استفاده کرد:

۱) $P(z > a) = ۱ - P(z < a)$

۲) $P(z > a) = P(z < -a)$

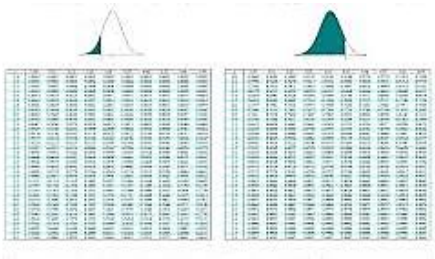
۳) $P(a < z < b) = P(z < b) - P(z < a)$

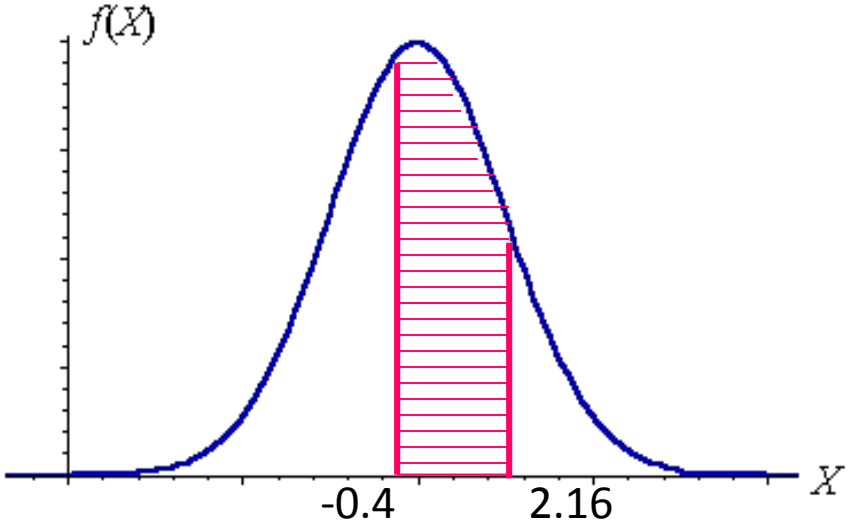
مثال: میزان آلایندگی سرب یک نوع اتومبیل بنزینی در هر ۱۰ کیلومتر دارای میانگین ۱ گرم و انحراف استاندارد (SD) ۰/۲۵گرم است. یک ماشین به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه آلایندگی سرب آن بین ۰/۹ تا ۱/۵۴ گرم باشد چقدر است؟

$$X \sim N(1, 0.25^2) \quad P(0.9 < X < 1.54)$$

$$P\left(\frac{0.9-1}{0.25} < \frac{X-1}{0.25} < \frac{1.54-1}{0.25}\right) = P\left(\frac{-0.1}{0.25} < Z < \frac{0.54}{0.25}\right) = P(-0.4 < Z < 2.16)$$

$$= F_Z(2.16) - F_Z(-0.4) = 0.9846 - (1 - 0.6554) = 0.64$$





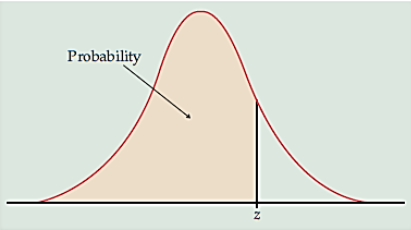


TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

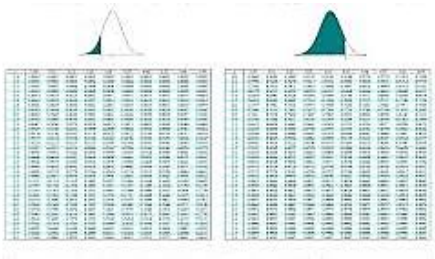
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

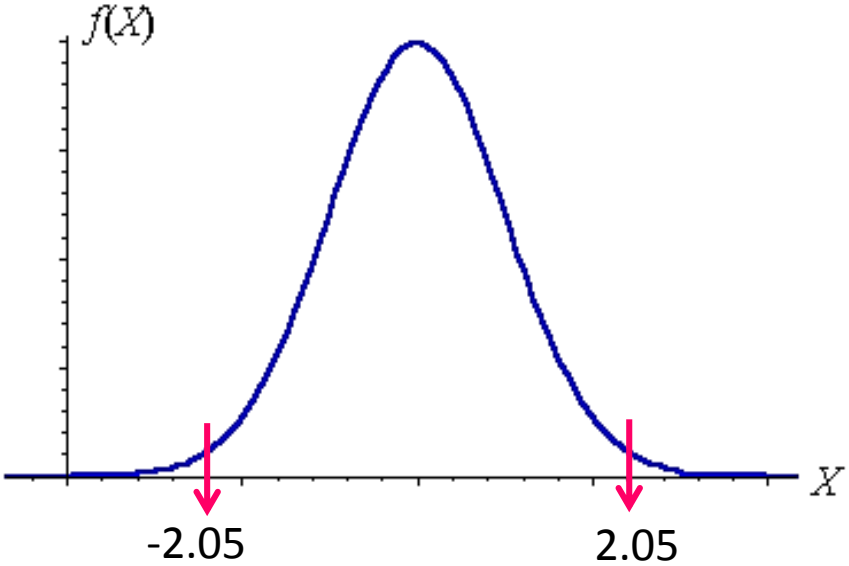
مثال: وزن بسته های چایی کیسه ای دارای انحراف از معیار ۰/۰۴ گرم هستند. همچنین میدانیم ٪۲ بسته ها دارای وزن چایی خشک کمتر از ۴ گرم هستند. میانگین این توزیع را حساب کنید.

$$X \sim N(\mu, 0.04^2), \qquad P(X < 4) = 0.02$$

$$P\left(Z < \frac{4-\mu}{0.04}\right) = 0.02 \Rightarrow P(Z < z) = 0.02 \Rightarrow P(Z < z') = 0.98$$

$$z' = 2.05 \quad \Rightarrow \quad z = -2.05 \qquad \frac{4-\mu}{0.04} = -2.05 \Rightarrow \mu = 4.082$$





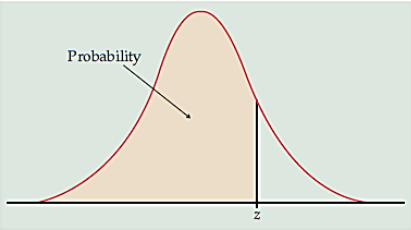


TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

مثال: قد افراد در یک منطقه، دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۷۰ و انحراف استاندارد ۱۰ سانتیمتر است. اگر یک فرد از افراد این منطقه را به تصادف انتخاب کنیم:

الف- احتمال اینکه قد او کمتر از ۱۶۴ سانتیمتر باشد چقدر است؟

ب- احتمال اینکه قد او در فاصله (۱۷۵ , ۱۶۵) باشد چقدر است؟

(الف)

$$P(X < ۱٦٤) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۱٦٤-۱۷۰}{۱۰}\right)$$

$$= P(Z < -۰/٦) = ۰/۲۷٤۳$$

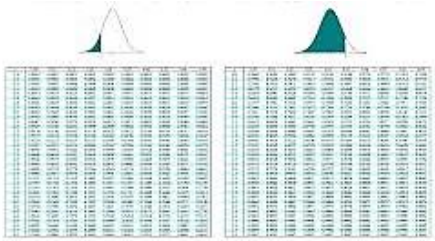
(ب)

$$P(۱٦٥ < X < ۱۷٥) = P\left(\frac{۱٦٥-۱۷۰}{۱۰} < Z < \frac{۱۷٥-۱۷۰}{۱۰}\right)$$

$$= P(-۰/٥ < Z < ۰/٥)$$

$$= P(Z < ۰/٥) - P(Z < -۰/٥)$$

$$= ۰/٦۹۱٥ - ۰/۳۰۸٥ = ۰/۳۸۳۰$$



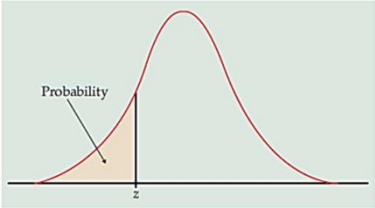


TABLE A Standard normal probabilities

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

تقریب احتمالات دوجمله ای با توزیع نرمال

دیدیم که در توزیع دوجمله‌ای هنگامی که تعداد تکرار آزمایش افزایش می‌یابد محاسبه احتمالات تقریباً غیر ممکن است. در چنین مواقعی استفاده از تقریب پواسن یک روش مناسب برای محاسبه تقریبی احتمالات دوجمله‌ای است.

یک روش دیگر، استفاده از توزیع نرمال استاندارد است، مشروط به اینکه مقادیر np و n(1-p) هردو بزرگتر از **۵** باشند، از تقریب نرمال استاندارد، اگر این مقادیر کوچکتر از **۵** باشند، از تقریب پواسون و اگر بین **۲** و **۵** باشند، برای $p<0.01$ از تقریب پواسون و برای $p>0.01$ از تقریب نرمال استاندارد استفاده شود.

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

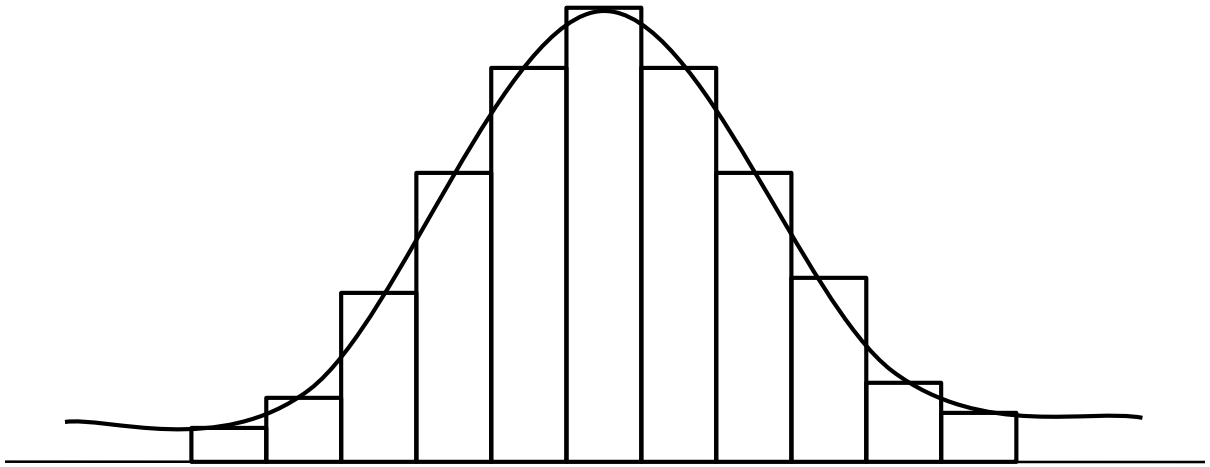
برای این کار از تغییر متغیر روبرو استفاده کنید.

که در آن $np = \mu_x$ میانگین و $\sqrt{npq} = \sigma_x$ انحراف استاندارد توزیع دوجمله ای است.

تقریب احتمالات دوجمله ای با توزیع نرمال

از آنجایی که توزیع نرمال استاندارد یک توزیع پیوسته و توزیع دوجمله‌ای یک توزیع گسسته است، بهتر است بر اساس یک قانون تجربی به نام تصحیح پیوستگی، احتمالات را دقیقتر به دست آورد.

به عنوان مثال اگر به جای فاصله $۷ \leq X \leq ۱۰$ ، فاصله $۶/۵ \leq X \leq ۱۰/۵$ را در نظر بگیریم، احتمال دوجمله‌ای با سطح زیر منحنی نرمال مربوطه بهتر تطبیق پیدا می‌کند.



مثال: ۳۰ درصد پذرفته شدگان دانشگاه، متاهل هستند. از یک نمونه شامل ۱۰۰۰ دانشجو،

(الف) احتمال اینکه متاهل‌ها کمتر از ۲۸۰ نفر باشند، چقدر است؟

(ب) احتمال اینکه دقیقا ۳۱۶ نفر باشند، چقدر است؟

با فرض این که X تعداد متاهل‌ها در نمونه ۱۰۰۰ تائی باشد، دراین صورت X دارای توزیع دو جمله‌ای با $n=۱۰۰۰$ و $p=۰/۳$ است.

میانگین و انحراف معیار توزیع عبارتند از:

$$\begin{cases} \sqrt{npq} = \sqrt{۱۰۰۰\times ۰/۳\times ۰/۷} = ۱٤/۵ \\ n.p = ۳۰۰ \end{cases}$$

(الف)

$$P(X < ۲۸۰/۵) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۲۸۰/۵-۳۰۰}{۱٤/۵}\right) = P(Z < -۱/۳۵) = ۰/۰۸۷۵$$

(ب)

$$P(X = ۳۱٦) = P\left(\frac{۳۱۵/۵-۳۰۰}{۱٤/۵} < Z < \frac{۳۱٦/۵-۳۰۰}{۱٤/۵}\right)$$

$$= P(۱/۰۷ < Z < ۱/۱٤) = P(Z < ۱/۱٤) - P(Z < ۱/۰۷) = ۰/۸۷۲۹ - ۰/۸۵۷۷ = ۰/۰۱۵۲$$

مثال: می‌دانیم ۱۰ درصد از بیماریهای صرع به دارو مقاوم هستند. چقدر احتمال دارد در بین ۲۰ بیمار که اخیرا دارو مصرف کرده اند؛

(الف) کمتر از ۱۶ نفر درمان شوند؟

(ب) دقیقا ۱۷ نفر درمان شوند؟

آزمایش فوق در شرایط توزیع دو جمله‌ای صدق می‌کند و به دلیل بالا بودن تکرار آزمایش می‌توان برای محاسبه احتمالات از توزیع نرمال استفاده کرد.

(الف)

$$E(x) = n \times p = ۲۰ \times ۰/۹ = ۱۸$$

$$\sigma_x^۲ = n \times p \times q = ۱/۸ \longrightarrow \sigma_x = ۱/۳٤$$

$$P(x < ۱٦) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{۱٦-۱۸}{۱/۳٤}\right) = P(z < -۱/٤۹) = ۰/۰۷۵$$

(ب) از تصحیح پیوستگی استفاده می کنیم؛ داریم:

$$P(x = ۱۷) = P(۱٦/۵ < x < ۱۷/۵) = P\left(\frac{۱٦/۵-۱۸}{۱/۳٤} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{۱۷/۵-۱۸}{۱/۳٤}\right)$$

$$= P(-۱/۲ < z < -۰/۳۷) = P(z < -۰/۳۷) - P(z < -۱/۲) = ۰/۳۵۵۷ - ۰/۱۱۵۱ = ۰/۲٤۰٦$$

مسئله:

احتمال مشاهدهٔ ۶ شیر در ۱۶ بار پرتاب یک سکه را با کمک روش توزیع دوجمله ای و همچنین تقریب نرمال استاندارد محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید.