آمار و احتمالات مهندسی

جلسه پنجم

اصول احتمال

تابع احتمال

تابع مجموعه ای P (تابعی که روی مجموعه ها اثر می کند یعنی دامنهٔ آن، مجموعه باشد) با مقادیر حقیقی (برد) بین ۰ و ۱ که در اصول زیر صدق کند:

۱- احتمال هر پیشامد عددی نامنفی است.

۲- احتمال رخداد پیشامد فضای نمونه برابر با ۱ است.

۳- اگر دنباله ای از پیشامدهای $A_1, A_2, \ldots$ که دو به دو مجزا باشند در نظر بگیریم داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

$$A_i \cap A_j = \varphi$$

قضایای احتمال

قضیه ۱: احتمال پیشامد تهی برابر با صفر است. $P(\phi)=0$

قضیه ۲: احتمال اجتماع دو یا چند پیشامد جدا از هم برابر با مجموع احتمالات آنهاست.

$$A_1 \cap A_2 = \varphi \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$A_i \cap A_j = \varphi, i \neq j \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

قضیه ۳: احتمال رخداد متمم یک پیشامد برابر است با:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

قضیه ۴: برای دو پیشامد A و B احتمال تفاضل B از A برابر است با:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

نتیجهٔ ۱: اگر B زیرمجموعهٔ A باشد ($B \subseteq A$):

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

نتیجهٔ ۲: اگر B زیرمجموعهٔ A باشد ($B \subseteq A$):

$$P(B) \leq P(A)$$

قضایای احتمال

قضیه ۵: برای دو پیشامد A و B احتمال اجتماع آنها برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

پس داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

نتیجهٔ ۱: نامساوی بول

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

نتیجهٔ ۲: نامساوی بن فرونی

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

قضایای احتمال

مثال: برای شورای یک شهر ۴ نفر نامزد شده اند. نظر سنجی ها نشان می دهد، احتمال اینکه نفر A برنده شود ۲ برابر نفر B است. احتمال برنده شدن نفر B نیز ۲ برابر نفر C است. احتمال انتخاب شدن نفر D نیز برابر با نفر C است. احتمال برنده شدن هرکدام از اینها چقدر است؟

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1 \Rightarrow 4P(C)+2P(C)+P(C)+P(C)=1 \Rightarrow$$
$$P(C)=\frac{1}{8} \Rightarrow P(A)=\frac{4}{8}, P(B)=\frac{2}{8}, P(D)=\frac{1}{8}$$

حداکثر احتمال اینکه نفر اول **یا** دوم انتخاب شوند چقدر است؟

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)=\frac{6}{8}$$

حداقل احتمال اینکه نفر اول **و** دوم انتخاب نشوند چقدر است؟

$$P(A'\cap B')\ge P(A')+P(B')-1=\frac{4}{8}+\frac{6}{8}-1=\frac{2}{8}$$

شانس و احتمال

شانس یک پیشامد برابر با نسبت احتمال رخداد آن بر احتمال عدم رخداد آن است.

$$\frac{a}{b}=\frac{P(A)}{1-P(A)}$$

مسئله:

شانس پیشامدی با احتمال 0.2برابر با 0.25 است که به معنی که شانس رخداد ۱ به ۴ است.

$$\frac{0.2}{1-0.2}=\frac{1}{4}$$

رابطه شانس با احتمال برای پیشامدی با شانس a به b

$$P(A)=\frac{a}{a+b}$$

احتمال شرطی (Conditional Probability)

میزان رضایت مشتریان از بخش تعمیرات یک شرکت خدمات پس از فروش از قرار جدول زیر است:

	خدمات مطلوب	خدمات نامطلوب	کل
تعمیر کار آموزش دیده	۴۸	۱۶	۶۴
تعمیر کار آموزش ندیده	۲۴	۶۲	۸۶
کل	۷۲	۷۸	۱۵۰

احتمال اینکه مشتری از خدمات رضایت داشته باشد و گزینه خدمات مطلوب را در ارزیابی انتخاب کرده باشد برابر با $\frac{72}{150}=0.48$

اگر بدانیم که تعمیرکار آموزش دیده اعزام شده است احتمال رضایت از خدمات برابر با $\frac{48}{64}=0.75$

زمانی که پیشامد B دارای احتمال مثبت باشد (یعنی صفر نباشد) احتمال شرطی پیشامد A با دانستن پیشامد B برابر است با:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \dashrightarrow P(A|B)P(B)=P(A\cap B)$$

همچنین اگر A زیرمجموعه B باشد داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

احتمال شرطی (Conditional Probability)

مثال: در سه بار پرتاب یک سکهٔ سالم و استاندارد، نتیجهٔ پرتاب اول و سوم یکسان است. احتمال اینکه پرتاب دوم نیز با پرتاب اول و سوم یکسان باشد چقدر است.

تعداد کل حالت های ممکن در سه پرتاب برابر با ۸ حالت است (۲×۲×۲).

A پیشامد یکسان بودن تمام پرتاب ها: A={HHH, TTT}

B پیشامد یکسان بودن پرتاب اول و سوم: B={HTH, THT, HHH, TTT}

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

خط شیر

پیشامد مستقل

پیشامد A را نسبت به B مستقل گویند، اگر رخداد B در رخداد A هیچ تاثیری نداشته باشد:

$$P(A|B)=P(A)$$

چنانچه پیشامد A نسبت به B مستقل باشد، پیشامد B نیز نسبت به A مستقل است.

اگر پیشامدهای A و B نسبت به هم مستقل باشند داریم:

$$\begin{cases} P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A|B)=P(A) \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$$

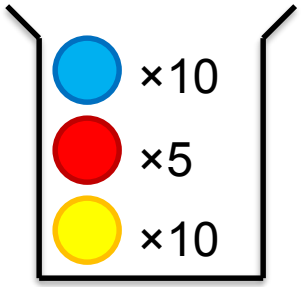
اغلب این رابطه به عنوان تعریف دو پیشامد مستقل استفاده می شود

مثال: احتمال قبولی یک دانشجو در درس آمار (A) ٪۷۵ و در درس مصالح ساختمانی (B) ٪۸۴ است. احتمال اینکه این دانشجو در هر دو درس قبول شود چقدر است؟

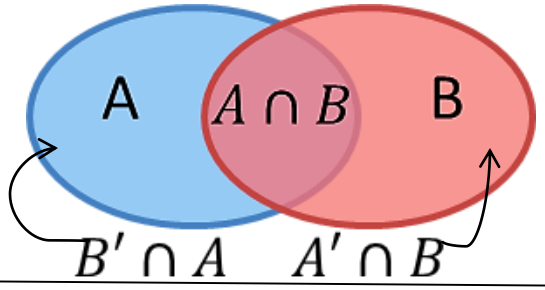
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{75}{100}\times\frac{84}{100}=\frac{63}{100}$$

پیشامد مستقل

مثال احتمال شرطی: ظرفی شامل تعدادی مهره رنگی به شکل زیر است. یک مهره به تصادف از ظرف خارج می کنیم و مشاهده می کنیم که قرمز نیست. احتمال اینکه آبی باشد چقدر است؟



$$P(B|R') = \frac{P(B\cap R')}{P(R')} = \frac{P(B)-P(B\cap R)}{P(R')} = \frac{10/25}{20/25} = \frac{1}{2}$$



مثال پیشامد مستقل: اطلاعات بدست آمده از درس خواندن و قبولی دانشجویان به شرح جدول زیر است. بررسی کنید آیا قبولی به درس خواندن ربط دارد؟

	قبولی B	ردی B'
درس خوان A	50%	10%
درس نخوان A'	10%	30%

احتمال درس خوان بودن P(A) و احتمال قبول شدن P(B) است.

$$(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B') = \frac{50}{100} + \frac{10}{100} = \frac{60}{100}$$

$$(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A') = \frac{50}{100} + \frac{10}{100} = \frac{60}{100}$$

$$P(A\cap B) = \frac{50}{100} \neq P(A)\times P(B) = \frac{60}{100}\times\frac{60}{100} = \frac{36}{100}$$

قبول شدن و درس خواندن مستقل از هم نیستند.