محاسبات عددی

Numerical Analysis

جلسه یازدهم

حل دستگاه معادلات خطی (Linear System of Equations)

اولین کار در حل دستگاه معادلات خطی نوشتن ماتریس های ضرایب، مجهولات و معلومات است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

ماتریس ضرایب　　بردار مجهولات　　بردار معلومات

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{(m\times n)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{(n\times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{(m\times 1)}$$

روش های حل دستگاه معادلات خطی:

۱- مستقیم: به کمک روش های بستهٔ ریاضیاتی دستگاه معادلات حل شده و جوابهایی که بدست می آیند اعداد ثابتی بوده و نتایج نهایی تنها ممکن است دچار مقداری خطای گرد کردن شده باشند.

۲- غیر مستقیم: ابتدا حدس هایی برای جوابها در نظر گرفته می شود و سپس به کمک رهیافت های تکراری رفته رفته به جوابهای نهایی نزدیک می شویم. بدین ترتیب که برای محاسبهٔ پاسخ معادله در هر مرحله از نتایج مراحل قبل استفاده می شود.

شرط وجود جواب در روش های مستقیم: دترمینان (determinant) ماتریس ضرایب، صفر نباشد.

شرط وجود جواب در روش های غیر مستقیم: علاوه بر غیر صفر بودن دترمینان، ماتریس ضرایب حتماً باید مثبت معین (Positive definite) و یا قطری غالب (diagonally dominant) باشد که البته بررسی یکی از دو شرط اخیر برای وجود جواب لازم و کافی است.

روش های مستقیم حل دستگاه معادلات خطی:

۱- معکوس ماتریس ضرایب

$$Ax = b \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}Ax = A^{-1}b \xrightarrow{A^{-1}A = I} x = A^{-1}b$$

این روش را به سادگی می توان در نرم افزار متلب بکار بست. چنانچه در متلب بخواهیم معکوس ماتریس مربعی A (که می دانیم معکوس پذیر هست) را حساب کنیم، کافی است بنویسیم $inv(A)$ و در جواب A^{-1} را مشاهده می کنیم. بنابراین ابتدا ضرایب را به فرم ماتریس مربعی A نوشته و همچنین بردار معلومات را نیز به فرم ماتریس ستونی b معرفی می کنیم.

در ادامه با ضرب ماتریس $inv(A)$ در بردار معلومات b یک ماتریس ستونی بدست خواهد آمد که همان ماتریس مجهولات بوده و درایه های آن به ترتیب مقادیر جواب مجهولات دستگاه معادلات را بیان می کند.

۱- اجرای روش معکوس ماتریس ضرایب با MATLAB

تعریف ماتریس ضرایب دستگاه معادلات

```
>> A=[2 4 6; 3 -1 0; 5 1 9]

A =

     2     4     6
     3    -1     0
     5     1     9
```

بررسی مقدار دترمینان

```
>> det(A)

ans =

   -78.0000
```

تعریف بردار یا ماتریس معلومات

```
>> b=[11; 15; 7]

b =

    11
    15
     7
```

محاسبهٔ جواب دستگاه یا محاسبهٔ درایه های بردار مجهولات

```
>> inv(A)*b

ans =

    6.5000
    4.5000
   -3.3333
```

حل دستگاه معادلات (System of Equations)

- **روش های مستقیم:**

۱- معکوس ماتریس ضرایب

۲- روش کرامر

۳- روش های حذفی

۳-۱- حذف ساده گوس (Naive Gaussian Elimination)

۳-۲- حذف گوس با محوریت نسبی قیاسی (Pivoting Gaussian Elimination)

روش های غیر مستقیم (Iterative Methods):

۱- روش ژاکوبی

۲- روش گوس- سیدال

- **روش کرامر**

زمانی می توان از این روش استفاده کرد که دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر نباشد.

نکته: در صورتی که ستر(ها) یا ستون (های) ماتریس مورد نظر ضریبی از ستر(ها) یا ستون (های) دیگری از آن باشد، آنگاه دترمینان حتماً برابر با صفر بوده و دستگاه جواب ندارد.

$$x_j = \frac{\det(A^j)}{\det(A)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ماتریس A^j از تعویض jامین ستون ماتریس A با بردار b بدست می آید.

حل دستگاه معادلات / روش های مستقیم/ روش کرامر

مثال: دستگاه روبرو را به کمک روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 + 40x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 = 20 \end{cases}$$

$$x_j = \frac{\det(A^j)}{\det(A)} \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{vmatrix} = 300000$$

$$\det(A^1) = \begin{vmatrix} 20 & -20 & -20 \\ 20 & 40 & -20 \\ 20 & -20 & 130 \end{vmatrix} = 180000 \implies x_1 = \frac{\det(A^1)}{\det(A)} = 0.6$$

$$\det(A^2) = \begin{vmatrix} 80 & 20 & -20 \\ -20 & 20 & -20 \\ -20 & 20 & 130 \end{vmatrix} = 300000 \implies x_2 = \frac{\det(A^2)}{\det(A)} = 1.0$$

$$\det(A^3) = \begin{vmatrix} 80 & -20 & 20 \\ -20 & 40 & 20 \\ -20 & -20 & 20 \end{vmatrix} = 120000 \implies x_3 = \frac{\det(A^3)}{\det(A)} = 0.4$$

• روش حذف ناقص یا سادهٔ گوس

این روش تنها زمانی به جواب می رسد که ضرایب بالا و یا پایین مثلثی ماتریس ضرایب غیر صفر باشند.

در این روش بردار معلومات را به ماتریس ضرایب اضافه کرده که به آن ماتریس افزوده (یا Augmented Matrix) گفته می شود.

$$\underset{(n\times n)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} + \underset{(n\times 1)}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{(n\times (n+1))}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}}$$

حل دستگاه معادلات (System of Equations) / روش های مستقیم

- **روش حذف ناقص یا سادهٔ گوس**

گام اول: اگر اولین درایهٔ ماتریس ضرایب غیر صفر باشد، برای تمامی درایه های هم ستون درایهٔ a_{11} ضرایب m_{i1} را محاسبه می کنیم. $a_{11}^{(1)} \neq 0$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}{}^{(1)}}{a_{11}{}^{(1)}}$$

گام دوم: درایه های اولین سطر از ماتریس افزوده را در m_{i1} ضرب کرده و تفریق روبرو را انجام می دهیم:

$$a_{ij}{}^{(2)} = a_{ij}{}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}{}^{(1)} \ , j = 2, 3, .. n$$

$$b_i{}^{(2)} = b_i{}^{(1)} - m_{i1} b_1{}^{(1)}$$

گام سوم: بدین ترتیب اولین سطرها ی A و b بدون تغییر باقی می مانند و درایه های اولین ستون از ماتریس A در زیر $a_{11}{}^{(1)}$ تبدیل به صفر می شوند. بنابراین نتیجهٔ حاصل از انجام عملیات فوق، دستگاه تغییر فرم یافتهٔ روبرو است:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & . & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & . & . & . & a_{2n}^{(2)} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & . & . & . & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{(1)}{}_1 \\ b^{(2)}{}_2 \\ . \\ . \\ . \\ b^{(2)}{}_n \end{pmatrix}$$

• روش حذف ناقص یا سادهٔ گوس

گام چهارم: همین روش را برای سایر سطرها نیز ادامه می دهیم که در حالت کلی در kامین گام (با فرض $a_{kk}^{(k)} \neq 0$) داریم:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{1k}^{(k)}}$$

Kامین سطر از ماتریس افزوده

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \quad , j = 2, 3, .. n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

مشاهده می شود که ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شد.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{1,k}^{(2)} & a_{1,k+1}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

• روش حذف ناقص یا سادهٔ گوس

بدین ترتیب آنچه حاصل می شود یک ماتریس ضرایب بالا مثلثی به فرم زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

همچنین بردار معلومات نیز به فرم روبرو ارتقا می یابد:

$$\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

تنها سطر و درایه ای که از ماتریس ضرایب و بردار معلومات در این روش تغییر نمی کند، سطر اول است.

بنابراین بر طبق دستگاه معادلات بدست آمده از آخر به اول مجهولات محاسبه می شوند.

حل دستگاه معادلات / روش های مستقیم/ روش حذف سادهٔ گوس

مثال: دستگاه زیر را به روش گوس حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 31 \\ -2 \\ 18 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده شده در طول با ضرایب m_{i1} ، عبارت است از:

درآیه محوری سطر اول →

$m_{21}=2/1=2$

$m_{31}=-1/1=-1$

$m_{41}=3/1=3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 31 \\ -1 & 1 & -5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & -2 & 18 \end{array}\right]$$

با تفریق حاصل ضرب های بدست آمده ی اولین معادله از سه معادله دیگر، داریم:

درآیه محوری سطر دوم →

$m_{32}=2/1=2$

$m_{42}=-2/1=-2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 4 & -5 & -12 \end{array}\right]$$

با تفریق حاصل ضرب های معدله سوم از معادله ی آخر هم خواهیم داشت:

درآیه محوری سطر سوم →

$m_{43}=2/-2=-1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

حل دستگاه معادلات / روش های مستقیم/ روش حذف سادهٔ گوس

مثال: دستگاه زیر را به روش گوس حل کنید: (ادامهٔ حل)

- با کم کردن حاصل ضرب های معادله سوم از معادله آخر، دستگاه بالا مثلثی زیر حاصل می آید:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$b_{new} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ -14 \\ -4 \end{bmatrix} \quad A_{new} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_{New} \times x = b_{New}}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 10 \\ x_2-x_3+3x_4 &= 11 \\ -2x_3-2x_4 &= -14 \\ -x_4 &= -4 \end{aligned}$$

- عملیات مربوط به دستورالعمل جایگذاری برگشتی با معکوس اعمال شده به دستگاه بالا مثلثی حاصل، نتایج زیر را بدست می دهد:

$$X_4 = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$X_3 = \frac{-14+2X_4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$X_2 = 11 + X_3 - 3X_4 = 11+3-12 = 2$$

$$X_1 = 10 - X_2 - X_3 - X_4 = 10-2-3-4 = 1$$

معایب: ❁ عدم کارآیی برای ماتریس ضرایب با وجود یک درایه‌ی پایه‌ی صفر.

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم (Iterative Methods)

نکات مهم روش های تکراری

شرط وجود جواب در روش های غیر مستقیم این است که علاوه بر غیر صفر بودن دترمینان، ماتریس ضرایب حتماً باید مثبت معین (Positive definite) و یا قطری غالب (diagonally dominant) باشد که البته بررسی یکی از دو شرط اخیر برای وجود جواب لازم و کافی است.

مثبت معین بودن یعنی دترمینان ماتریس هم مخالف صفر باشد و هم مثبت باشد.

قطری غالب بودن یعنی:

برای

$$for\ \ i = 1\ \ to\ n\ : |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

و حداقل برای یک سطر از A

$$and\ at\ least\ for\ a\ row\ of\ A : |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم (Iterative Methods)

نکات مهم روش های تکراری

با توجه به شرایط ذکر شده، کدام یک از ماتریس ضرایب زیر به طور قطری، غالب هستند؟

$$[A]=\begin{bmatrix}123 & 16 & -1\\ 35 & -43 & 1\\ 2 & -5.81 & 34\end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix}124 & 34 & -56\\ 23 & 53 & 5\\ -96 & 34 & -129\end{bmatrix}$$

با توجه به شرایط ذکر شده از تمامی درایه های ماتریس ها قدر مطلق می گیریم.

$$[A]=\begin{bmatrix}|123| & |16| & |-1|\\ |35| & |-43| & |1|\\ |2| & |-5.81| & |34|\end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix}|124| & |34| & |-56|\\ |23| & |53| & |5|\\ |-96| & |34| & |-129|\end{bmatrix}$$

$123 > 16 + 1$

$43 > 35 + 1$

$34 > 5.81 + 2$

Diagonally Dominant

$124 > 34 + 56$

$53 > 23 + 5$

$129 < 96 + 34$

* طبق شرایط ذکر شده، ماتریس A، diagonally dominant هست زیرا هم قدر مطلق ضرایب روی قطر اصلی از مجموع سایر ضرایب هر سطر بزرگتر مساوی هستند. همچنین حداقل یکی از درایه های روی قطر اصلی بزرگتر از مجموع درایه های همان سطر است.

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم (Iterative Methods)

تمامی روش هایی که تا کنون ذکر شدند در واقع محاسبات عددی نبودند و به نوعی روش ریاضیاتی بودند که با طی کردن مراحلی جواب دستگاه بدست می آمد. در اینجا روش هایی برمبنای تکرار و بر اساس محاسبات عددی برای برآورد جواب معادلات بر مبنای تکرار محاسبات ارائه خواهد شد.

در این روشها در **مرحلهٔ اول** بایستی دستگاه معدلات خطی را به فرم زیر در آورد:

$$Ax = b \Rightarrow x = b' - Bx$$

$$\begin{cases} a_{11} \times x_1 + a_{12} \times x_2 = b_1 \\ a_{21} \times x_1 + a_{22} \times x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \times x_1 = b_1 - a_{12} \times x_2 \\ a_{22} \times x_2 = b_2 + a_{21} \times x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = {}^{b_1}/_{a_{11}} - {}^{a_{12}}/_{a_{11}} \times x_2 \\ x_2 = {}^{b_2}/_{a_{22}} + {}^{a_{21}}/_{a_{22}} \times x_1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{b_1}/_{a_{11}} \\ {}^{b_2}/_{a_{22}} \end{bmatrix}}_{b'} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & {}^{a_{12}}/_{a_{11}} \\ {}^{a_{21}}/_{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}}_{B} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

مشاهده می شود که **B** را میتوان به سادگی از روی ماتریس ضرایب معلومات بدست آورد

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم (Iterative Methods)

به عنوان مثال اگر بخواهیم ماتریس B را برای یک دستگاه معادلهٔ سه مجهولی بنویسیم کافی است عناصر قطر اصلی یک ماتریس ۳×۳ را صفر قرار داده و سایر درایه ها را از ماتریس ضرایب گرفته و بر عناصر قطر اصلی ماتریس ضرایب تقسیم کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین اگر بخواهیم ماتریس b' را نیز برای دستگاه سه معادله سه مجهولی بنویسیم، می بایست ماتریس معلومات را درایه به درایه بر عنصر قطر اصلی متناظر ماتریس ضرایب تقسیم کنیم:

$$b' = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم (Iterative Methods)

در **مرحلهٔ اول** بایستی دستگاه معدلات خطی را به فرم زیر در آورد:

$$Ax = b \Rightarrow x = b' - Bx$$

در **مرحلهٔ دوم** بایستی یک حدس اولیه برای بردار جواب در نظر بگیریم (یک بردار تمام صفر یا تمام یک ولی ترجیهاً هرچه به جوابها نزدیک تر باشد تکرار محاسبات کمتر می شود یعنی سرعت همگرایی افزایش می یابد):

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در **مرحلهٔ سوم** می توان دنبالهٔ ماتریس بردارهای پاسخ تقریبی را از فرمول زیر بدست آورد:

$$x^{(k)} = b' - Bx^{(k-1)} \Rightarrow$$ به ازای $k=1,2,3,..$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم (Iterative Methods)

روش ژاکوبی (Jacobi):

در این روش هر یک از مجهولات را با تغییر فرم دستگاه معادلات به صورت زیر بدست می آوریم:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

این فرمول پیچیده به نظر می رسد و لی در واقع همان چیزی است که در اسلاید های قبل بیان شده است.

مقدار $x_i^{(k)}$ برای k بزرگتر و مساوی ۱ از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1,2,\ldots, n$$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم (Iterative Methods)

روش ژاکوبی (Jacobi):

در روش ژاکوبی مراحل قبل آنقدر تکرار می شود تا شرط زیر بر قرار گردد:

فاصلهٔ دو بردار از هم

$$e_k = \frac{\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right|}{\left| x^{(k)} \right|} \le \varepsilon \quad where \quad x^{(k)} = [x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}]$$

اندازهٔ بردار

فاصلهٔ دو بردار از هم

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| = \sqrt{(x_1{}^{(k)} - x_1{}^{(k-1)})^2 + (x_2{}^{(k)} - x_2{}^{(k-1)})^2 + \cdots + (x_n{}^{(k)} - x_n{}^{(k-1)})^2}$$

اندازهٔ بردار

$$\left| x^{(k)} \right| = \sqrt{(x_1{}^{(k)})^2 + (x_2{}^{(k)})^2 + \cdots + (x_n{}^{(k)})^2}$$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم/ روش ژاکوبی

مثال: دستگاه زیر را با روش ژاکوبی حل کنید. با فرض : $x^{(0)} = 0 \qquad It - Max = 30, \qquad \varepsilon = 10^{-3},$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 - x_4 = 13 \\ 2x_1 + 10x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 10 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 10 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 13 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Ax = b \Rightarrow x = b' - Bx}$$

معادلات را به صورت روبرو بازنویسی می کنیم:

$$x_1 = (17 + 2x_2 - x_3)/7$$
$$x_2 = (-13 + x_1 + 3x_3 - x_4)/9$$
$$x_3 = (15 - 2x_1 - x_4)/10$$
$$x_4 = (10 - 2x_1 + x_2 - x_3)/6$$

$$b' = \begin{bmatrix} 17/7 \\ -13/9 \\ 15/10 \\ 10/6 \end{bmatrix} \qquad -B = \begin{bmatrix} 0 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 1/9 & 0 & 3/9 & -1/9 \\ -2/10 & 0 & 0 & -1/10 \\ -2/6 & 1/6 & -1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین فرم عملیات تکرار متوالی ژاکوبی برابر است با :

$$x_1^{(k+1)} = (17 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/7$$
$$x_2^{(k+1)} = (-13 + x_1^{(k)} + 3x_3^{(k)} - x_4^{(k)})/9$$
$$x_3^{(k+1)} = (15 - 2x_1^{(k)} - x_4^{(k)})/10$$
$$x_4^{(k+1)} = (10 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/6$$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم/ روش ژاکوبی

مثال: دستگاه زیر را با روش ژاکوبی حل کنید. با فرض : $x^{(0)} = 0$, $It - Max = 30$, $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 - x_4 = 13 \\ 2x_1 + 10x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 10 \end{cases}$$

(ادامهٔ حل)

بدین ترتیب داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1^{(1)} &= (17 + 2(0) - 0)/7 = 2.428571429 \\ x_2^{(1)} &= (-13 + 0 + 3(0) - 0)/9 = -1.444444444 \\ x_3^{(1)} &= (15 - 2(0) - 0)/10 = 1.5 \\ x_4^{(1)} &= (10 - 0 + 0 - 0)/6 = 1.666666667 \end{aligned}$$

و برای ۹ بار تکرار این محاسبات داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \\ x_4^{(9)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.000127103 \\ -1.000100162 \\ 1.000118096 \\ 1.000162172 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم/ روش ژاکوبی

مثال: دستگاه زیر را با روش ژاکوبی حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 12 \\ 4x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- گام اول: چک کردن شرایط لازم برای ماتریس ضرایب (قطری غالب و مثبت معین بودن)

شرایط گام اول را ندارد پس با این روش به جواب نمی رسد.

- گام دوم: تغییر فرمت دادن معادله از $Ax = b$ به $x = b' - Bx$
- گام سوم: استفاده از یک حدس اولیه و محاسبه نتایج

$$x_i(k) = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{ij} x_j(k-1)) + b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (4-11)$$

- گام چهارم: انجام محاسبات مربوط به روش ژاکوبی تا رسیدن به دقت مطلوب

$$e_k = \frac{|x^{(k)} - x^{(k-1)}|}{|x^{(k)}|} \leq \varepsilon \quad where \quad x^{(k)} = [x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}]$$

حل دستگاه معادلات / روش های غیر مستقیم/ روش ژاکوبی

تعریف مثبت معین (Positive definite) بودن یک ماتریس:

تعریف: یک ماتریس متقارن $M \in R^{n\times n}$ مثبت معین (positive definite) نامیده می شود (M>0) اگر برای هر $x \in R^n$ داشته باشیم:

ماتریسی n×n از اعداد حقیقی

بردار n بعدی از اعداد حقیقی

$$x^T M\ x \in R^+$$

ترانهادهٔ بردار x ضرب در ماتریس M ضرب در بردار x برابر با یک عدد حقیقی مثبت باشد

اگر این شرط برای ماتریس ضرایب برقرار بود می توانیم از روش های غیر مستقیم استفاده کنیم