محاسبات عددی

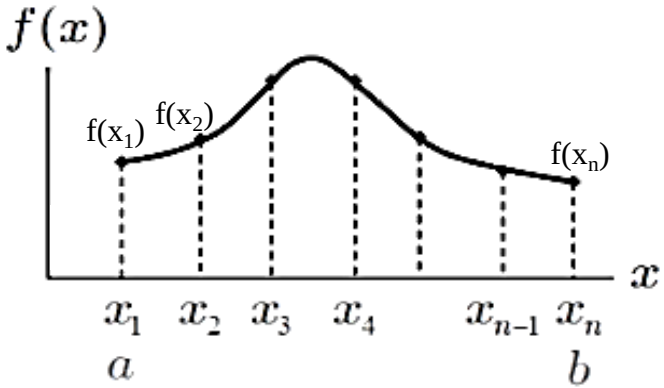
Numerical Analysis

جلسه نهم

شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

➢ حالت کلی تقریب انتگرال بر مبنای ریمان به صورت زیر است:

عموم روش های انتگرال گیری بر مبنای تقسیم فواصل انتگرال گیری به زیربازه های کوچکتر و محاسبهٔ مجموع مساحت های زیر بازه ها ارائه شده اند:



$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f_i(x_i)$$

در این روش ها برآورد مقادیر $f(x_i)$ و مقادیر وزنی A_i به روش مورد استفاده بستگی دارد.

- **روش نیوتن-کاتس بسته** (با فواصل مساوی)

۱- تقسیم فاصلهٔ [a, b] به (n-1) فاصلهٔ مساوی h

۲- تقریب چند جمله ای درجهٔ (n-1) عبوری از نقاط داده شده

۳- چندجمله ای لاگرانژ می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

$$h = \frac{\text{مقدار انتهای بازه} - \text{مقدار ابتدای بازه}}{\text{تعداد زیربازه}} = \frac{b-a}{n-1}$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

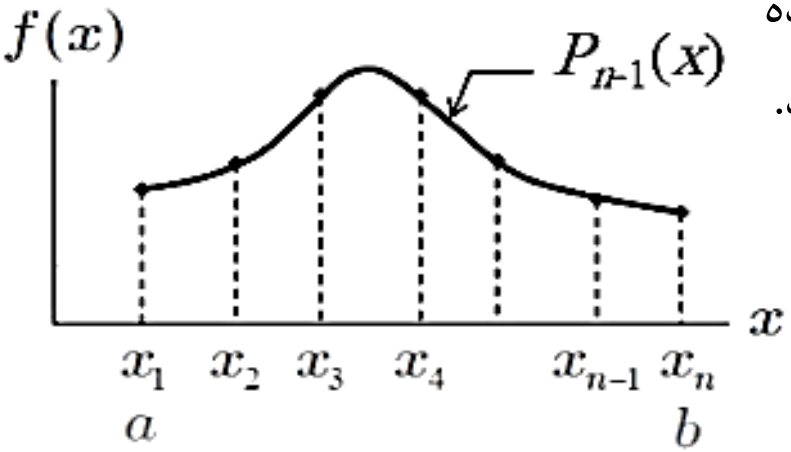
شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

- **روش نیوتن-کاتس بسته** (با فواصل مساوی)

۱- تقسیم فاصلهٔ [a, b] به (n-1) فاصلهٔ مساوی h

۲- تقریب چند جمله ای درجهٔ (n-1) عبوری از نقاط داده

۳- چندجمله ای لاگرانژ می تواند مورد استفاده قرار گیرد.



$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

$$I = \int_a^b P_{n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \ ,$$

$$\boxed{A_i = \int_a^b L_i(x)dx}$$

شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

- **روش نیوتن-کاتس** (فواصل مساوی)

اگر درونیاب خطی را در نظر بگیریم:

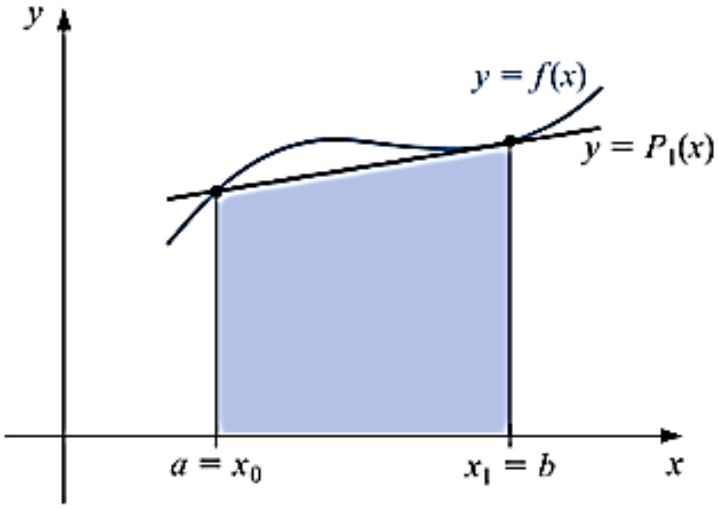
$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1}$$

در نتیجه داریم:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]}$$

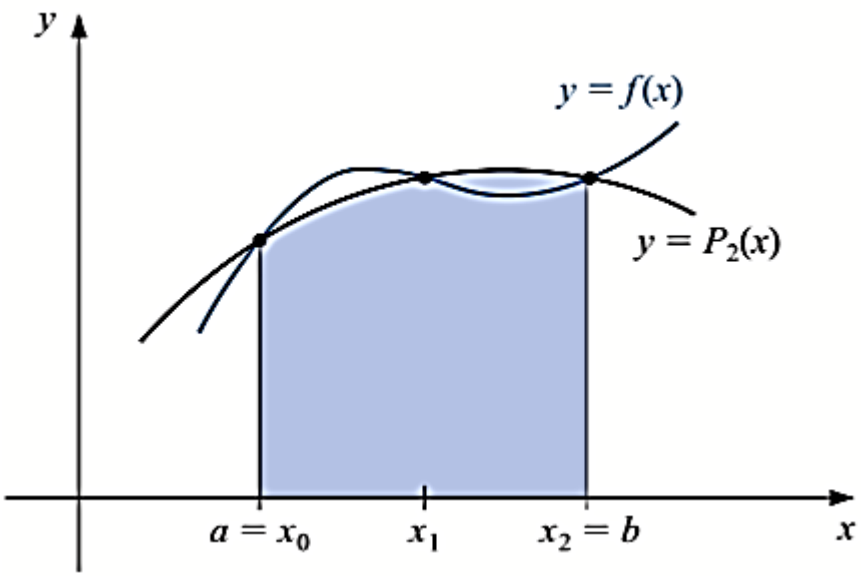


شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

- **روش نیوتن-کاتس** (فواصل مساوی)

با انتگرال گیری از درونیاب درجهٔ ۲ داریم:

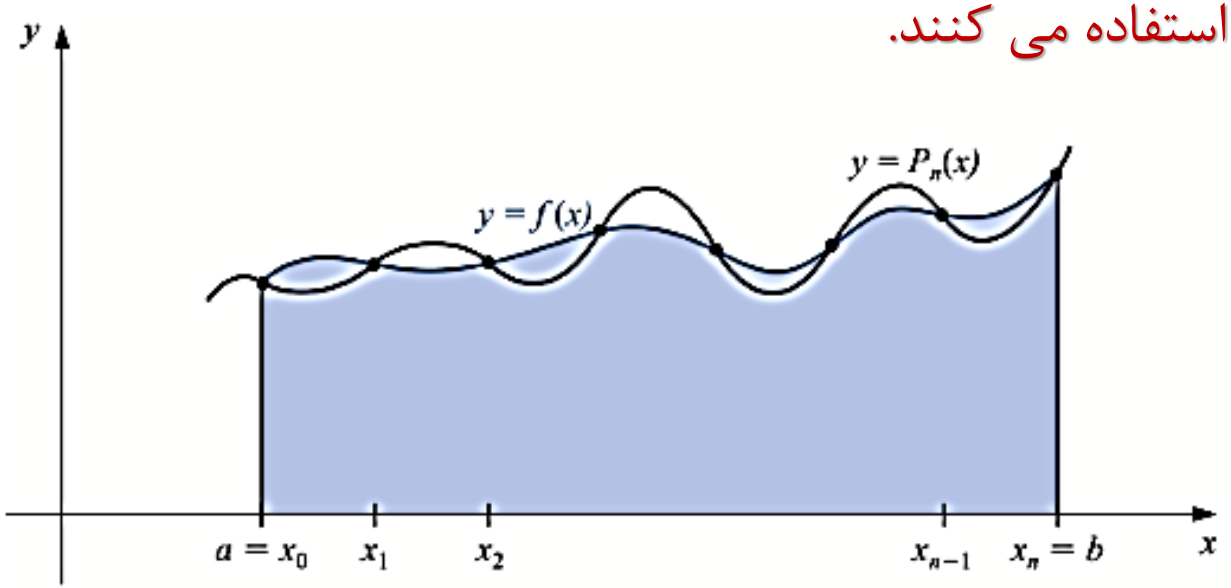
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$



شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

- **روش نیوتن-کاتس** (فواصل مساوی)

روش هایی که در اینجا بدست آوردیم موسوم به روش های نیوتن-کاتس بسته اند زیرا از نقاط ابتدا و انتها برای محاسبهٔ انتگرال استفاده می کنند.



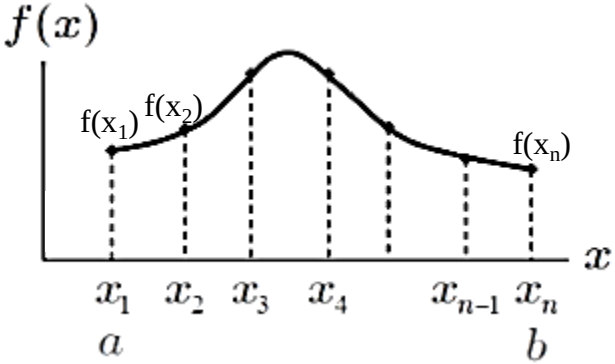
Closed Newton-Cotes Formulas

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \qquad a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\,dx.$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad x_0 = a, x_n = b \quad h = (b-a)/n.$$

شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

➢ روش ذوزنقه (Trapezoid)



تقسیم فواصل انتگرال گیری به زیر بازه های کوچکتر و محاسبهٔ مجموع مساحت های زیر بازه ها.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{[f(x_{i+1}) + f(x_i)]}{2}$$

عرض هر زیر بازه برابر با Δx بوده و در درون زیربازه ها منحنی تابع $f(x)$ به صورت یک خط راست در نظر گرفته می شود تا شکل زیر بازه ها شبیه ذوزنقه شود.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

مثال: با استفاده از مقادیر جدول زیر تقریبی از مقدار $\int_0^1 f(x)dx$ حساب کنید.

$\Delta x=0.2$

x_i	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f_i	۱	۱/۲۲۱۴	۱/۴۹۱۸	۱/۸۲۲۱	۲/۲۲۵۵	۲/۷۱۸۳
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

$$\int_0^1 f(x)dx =$$

$$\frac{۰/۲}{۲}(f(۰) + ۲(f(۰/۲) + f(۰/۴) + f(۰/۶) + f(۰/۸)) + f(۱))$$

$$= ۱/۷۲۳۹۹$$

شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

- **روش ذوزنقه (Trapezoid)**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]}$$

تمرین ۱: با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه و با در نظر گرفتن n=2 انتگرال زیر را تقریب بزنید.

$$\int_0^3 x^2e^x dx \Rightarrow \qquad h=\frac{b-a}{2}=\frac{3-0}{2}=1.5$$

$$\int_0^3 x^2e^x dx \approx \frac{1.5}{2}[f(a)+2f(a+h)+f(b)]=150.7031$$

تمرین ۲: با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه و با در نظر گرفتن n=5 انتگرال زیر را تقریب بزنید.

$$\int_0^1 (7+14x^6)dx \qquad f(x)=7+14x^6$$

جواب نهایی : S=9.28

شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

➢ قاعدهٔ سیمپسون

در قاعدهٔ ذوزنقه برای تقریب انتگرال درون زیربازه ها، منحنی تابع f(x) به صورت یک خط راست در نظر گرفته می شود اما در روش سیمپسون یک چندجمله ای درجهٔ دوم را جایگزین تابع f(x) در زیربازه ها می کنیم و با فرض زوج بودن تعداد n خواهیم داشت:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right]}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

مثال: مقدار انتگرال $\int_0^3 x^2 e^x.dx$ را به روش سیمپسون تقریب بزنید.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{2} = 1.5$$

$$\int_0^3 x^2 e^x dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \quad = \frac{1}{2}[f(0) + 4f(1.5) + f(3)] \quad = 110.55252$$

شیوه های انتگرال گیری عددی/تقریب انتگرال بر مبنای ریمان

- **قاعدهٔ سیمپسون**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right]$$

مثال: مقدار انتگرال $\int_1^{1.3} \sqrt{x}.dx$ را به روش سیمپسون و به ازای $h=0.05$ تقریب بزنید.

$$\int_1^{1.3} \sqrt{x}dx = S(۰/۰۵) = \frac{۰/۰۵}{۳}[۱ + ۴(۱/۰۲۴۷۰) + ۲(۱/۰۴۸۸۱) + ۴(۱/۰۷۲۳۸) +$$

$$۲(۱/۰۹۵۴۵) + ۴(۱/۱۱۸۰۳) + ۱/۱۴۰۱۸] = ۰/۳۲۱۴۹$$