محاسبات عددی

Numerical Analysis

جلسه هفتم

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

فرمول کلی به قرار زیر بود:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}}$$

ضرایب مرتبهٔ صفرم، اول، دوم و سوم تا nام این رابطه به صورت زیر بودند:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

روش لاگرانژ و روش نیوتن برای نقاط با هر فاصله ای قابلیت کاربرد داشتند. چنانچه تمامی نقاط فواصل یکسانی باهم داشته و با نظم مشخصی لحاظ شده باشند، عملیات درونیابی به مراتب ساده تر خواهد شد. رابطهٔ زیر بین نقاط برقرار بوده و در آن h گام بین نقاط است.

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0,1,\ldots n \ \& \ h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

برای این که بتوان به آسانی به کمک روش درون یابی **پیش روندهٔ نیوتن**، معادلهٔ تابع چند جمله ای عبوری بر نقاط داده شده را بدست آوریم ابتدا می بایست نقاط را به صورت صعودی مرتب کنیم.

ضرایب چندجمله ای به صورت فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\Delta f_i = f[x_{i+1}] - f[x_i] = f_{i+1} - f_i, \ i = 0,1,\ldots \qquad \Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i), \ n = 2,3,\ldots$$

بنابراین معادلهٔ $P_n(x)$ را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=1}^{i} (x - x_{j-1})$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0, \qquad s = \frac{x - x_0}{h}}$$

روش درون یابی پیش روندهٔ نیوتن (Newton Continuous Interpolation)

در این روش ضرایب دلتا (Δ) بدین صورت محاسبه می شوند:

$$f[x_0]=f(x_0) \quad \equiv \Delta^0 f_0 = f_0 = y_0$$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \quad \equiv \Delta^1 f_0 = \Delta^0 f_1 - \Delta^0 f_0 = y_1 - y_0$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \quad \equiv \Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} \quad \equiv \Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$$

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0, \qquad s=\frac{x-x_0}{h}$$

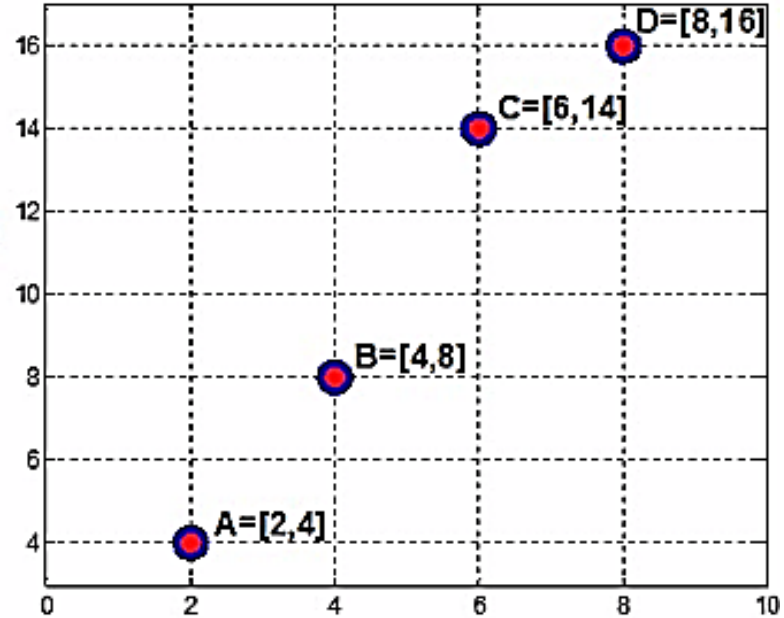
$$\binom{s}{k}=\frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

$$s=\frac{x-x_0}{h}$$

روش درون یابی پیش رونده نیوتن (Newton Continuous Interpolation)

مثال: با توجه به نقاط موجود در جدول زیر جدول تفاضل های تقسیم شده را نوشته و چند جمله ای درونیاب نیوتن را بدست آورید:

	A	B	C	D
x	۲ x_0	۴ x_1	۶ x_2	۸ x_3
y	۴ $f_0=y_0$	۸ $f_1=y_1$	۱۴ $f_2=y_2$	۱۶ $f_3=y_3$



$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0\,,\ s=\frac{x-x_0}{h}$$

$$h=\frac{x_n-x_0}{n}=\frac{8-2}{3}=2$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n=3}\binom{s}{k}\Delta^k f_0=\sum_{k=0}^{3}\frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}\Delta^k f_0$$

انواع روش های درون یابی / روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

مثال: با توجه به نقاط موجود در جدول زیر جدول تفاضل های تقسیم شده را نوشته و چند جمله ای درونیاب نیوتن را بدست آورید:

x	۲ x_0	۴ x_1	۶ x_2	۸ x_3
y	۴ $f_0=y_0$	۸ $f_1=y_1$	۱۴ $f_2=y_2$	۱۶ $f_3=y_3$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0 \qquad s=\frac{x-x_0}{h} \qquad h=\frac{x_n-x_0}{n}=\frac{8-2}{3}=2 \quad \Rightarrow \quad s=\frac{x-2}{2}$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n=3}\binom{s}{k}\Delta^k f_0=\sum_{k=0}^{3}\frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}\Delta^k f_0$$

$$\boxed{P_n(x)=\Delta^0 f_0+\frac{s}{1!}\Delta^1 f_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0}$$

انواع روش های درون یابی / روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

ادامهٔ حل مثال:

$$P_n(x) = \Delta^0 f_0 + \frac{s}{1!}\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$s = \frac{x-2}{2}$$

x_i	$\Delta^0 f_i$	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۲	۴			
		$\Delta^1 f_0 = 8-4=4$		
۴	۸		$\Delta^2 f_0 = 6-4=2$	
		$\Delta^1 f_1 = 14-8=6$		$\Delta^3 f_0 = -4-2=-6$
۶	۱۴		$\Delta^2 f_1 = 2-6=-4$	
		$\Delta^1 f_2 = 16-14=2$		
۸	۱۶			

$$\Delta^1 f_i = f[x_{i+1}] - f[x_i] = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) \Rightarrow \begin{cases} \Delta^2 f_i = \Delta(\Delta^1 f_i) = \Delta^1 f_{i+1} - \Delta^1 f_i \\ \Delta^3 f_i = \Delta(\Delta^2 f_i) = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i \end{cases}$$

انواع روش های درون یابی / روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

ادامهٔ حل مثال:

x_i	$\Delta^0 f_i$	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۲	۴			
		$\Delta^1 f_0 = 8-4=4$		
۴	۸		$\Delta^2 f_0 = 6-4=2$	
		$\Delta^1 f_1 = 14-8=6$		$\Delta^3 f_0 = -4-2=-6$
۶	۱۴		$\Delta^2 f_1 = 2-6=-4$	
		$\Delta^1 f_2 = 16-14=2$		
۸	۱۶			

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$$

$$P_n(x) = \Delta^0 f_0 + \frac{s}{1!}\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$s = \frac{x-2}{2}$$

$$P_n(x) = 4 + (\tfrac{x-2}{2}) \times 4 + \left((\frac{x-2}{2})(\frac{x-2}{2}-1) \Big/ 2! \right) \times 2 + \left((\frac{x-2}{2})(\frac{x-2}{2}-1)(\frac{x-2}{2}-2) \Big/ 3! \right) \times -6$$

$$= 4 + (2x-4) + (x-2)(x-4)/4 - (x-2)(x-4)(x-6)/8$$

$$= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - 5x + 8$$

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی پسرو نیوتن

در عملگر تفاضل پسرو، ∇ (گرادیان) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\nabla^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_s - \nabla^{i-1} f_{s-1}, & i > 0 \end{cases}$$

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

فرمول چند جمه ای درونیاب بر حسب تفاضلات پسرو عبارت است از:

$$P(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \cdots + \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \qquad (12)$$

که در آن s برابر است با:

$$x = x_n + sh$$

روش درون یابی پیش رونده نیوتن (Newton Continuous Interpolation)

مثال: با توجه به نقاط موجود در جدول زیر جدول تفاضل های تقسیم شده را نوشته و چند جمله ای درونیاب نیوتن را بدست آورید:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷
	$f_0=y_0$	$f_1=y_1$	$f_2=y_2$	$f_3=y_3$

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۲	
		۵		۰
۳	۱۰		۲	
		۷		
۴	۱۷			

$$P(x) = f_۳ + s\nabla f_۳ + \frac{s(s+۱)}{۲}\nabla^۲ f_۳$$

$$= ۱۷ + ۷s + \frac{s(s+۱)}{۲}۲ = s^۲ + ۸s + ۱۷$$

$$s = x - ۴$$

$$P(x) = (x-۴)^۲ + ۸(x-۴) + ۱۷ = x^۲ + ۱$$