محاسبات عددی

Numerical Analysis

جلسه ششم

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

درونیابی به روش تفاضل های تقسیم شوندهٔ نیوتن (Newton Difference Interpolation Method)

فرمولی که در اینجا معرفی می شود نسبت به روش های درونیابی قبلی کارآمدتر و راحت تر است. به عنوان مثال، اگر در روش لاگرانژ یک نقطه به نقاط ورودی اضافه یا کم شود، لازم است که تمام محاسبات از اول انجام شوند؛ ولی روش نیوتن این گونه نبوده و نیاز به محاسبات مجدد ندارد.

در روش نیوتن اگر چند جمله ای درونیاب $P(x)$ در نقاط $x_0, x_1, \ldots x_n$ به صورت زیر باشد:

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$$

$$(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

(قابل ذکر است که این رابطه از بسط تیلور نتیجه شده است)

همانطور که مشاهده می شود، عبارت $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ضریب nامین مرتبهٔ تفاضل تقسیم شدهٔ تابع $p(x)$ می باشد و به صورت زیر محاسبه می شود.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

در درونیابی به روش تفاضل های تقسیم شوندهٔ نیوتن، در هر مرتبه، ضریب به کمک مراتب پایینتر از آن محاسبه می شود.

به طوری که ضریب مرتبهٔ صفرم برابر با مقدار خود تابع است، یعنی: $f[x_0] = f(x_0)$

و ضریب مرتبهٔ اول نیز برابر است با:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

.
.
.
.
.

بنابراین ضریب مرتبهٔ nام به صورت زیر محاسب می شوند:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

بنابراین فرمول کلی به صورت زیر است:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}}$$

ضرایب مرتبهٔ صفرم، اول، دوم و سوم تا nام این رابطه به صورت زیر می باشند:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$\vdots$$

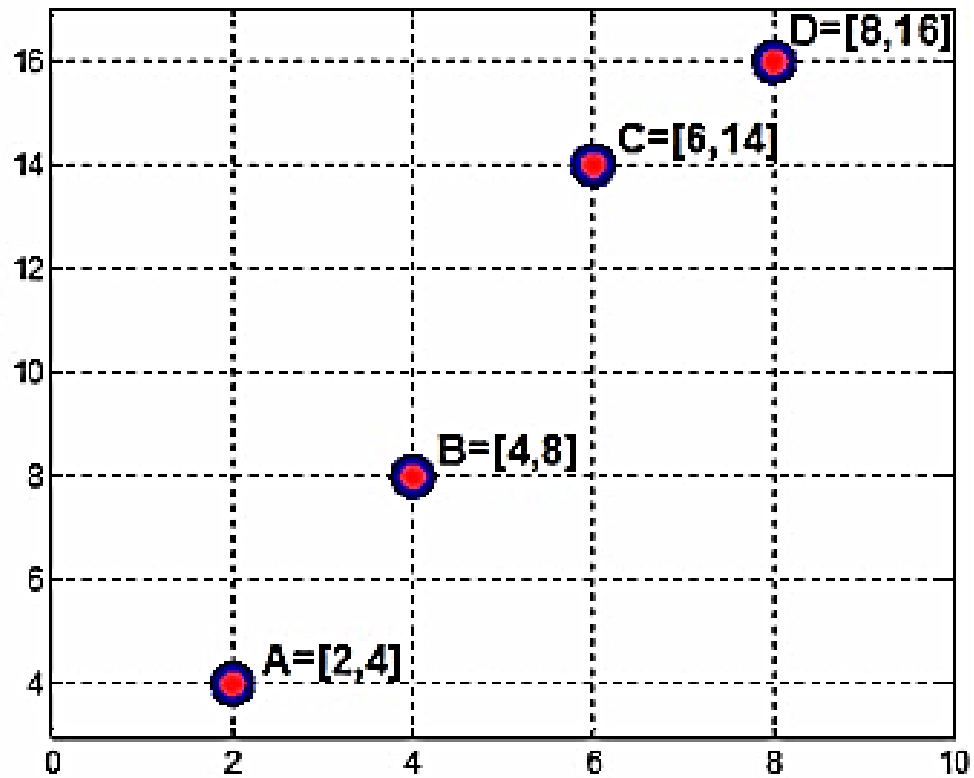
$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

توجه داشته باشید که المان $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ ، با چرخش سیکلی آرگومان های $x_0,x_1,\ldots,x_n$ تغییر ناپذیر است.

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

مثال: با توجه به نقاط موجود در جدول زیر جدول تفاضل های تقسیم شده را نوشته و چند جمله ای درونیاب نیوتن را بدست آورید:

x	۲	۴	۶	۸
y	۴	۸	۱۴	۱۶



انواع روش های درون یابی / روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

حل مثال:

x	۲	۴	۶	۸
y	۴	۸	۱۴	۱۶

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

x_i	$f[x_i]$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$
۲	۴			
		$\frac{8-4}{4-2}=2$		
۴	۸		$\frac{3-2}{6-2}=\frac{1}{4}$	
		$\frac{14-8}{6-4}=3$		$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{8-2}=-\frac{1}{8}$
۶	۱۴		$\frac{1-3}{8-4}=-\frac{1}{2}$	
		$\frac{16-14}{8-6}=1$		
۸	۱۶			

انواع روش های درون یابی / روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

حل مثال:

x	۲	۴	۶	۸
y	۴	۸	۱۴	۱۶

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
۲	۴			
		$\frac{8-4}{4-2}=2$		
			$\frac{3-2}{6-2}=\frac{1}{4}$	
۴	۸			$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{8-2}=-\frac{1}{8}$
		$\frac{14-8}{6-4}=3$		
			$\frac{1-3}{8-4}=-\frac{1}{2}$	
۶	۱۴			
		$\frac{16-14}{8-6}=1$		
۸	۱۶			

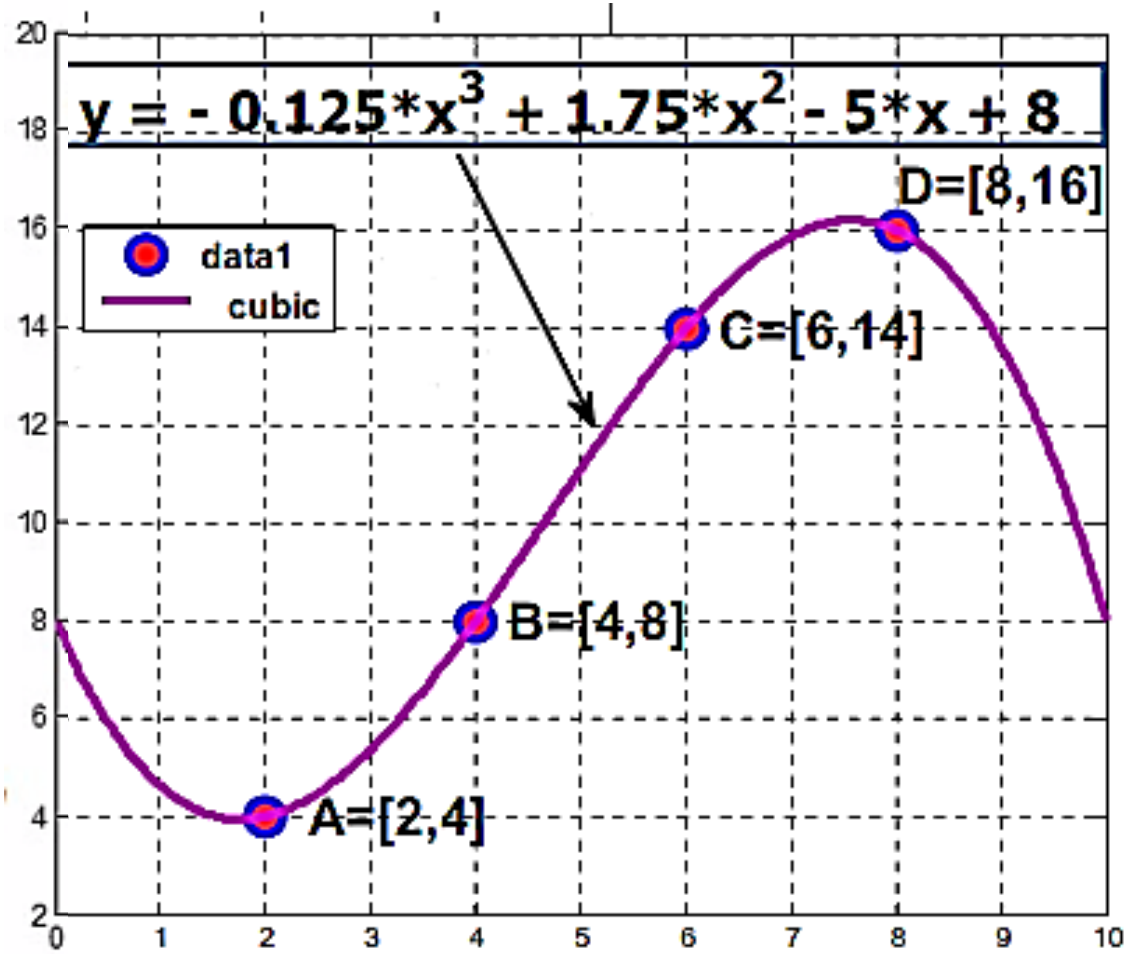
$$P_3(x)=4+2(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)(x-4)-\frac{1}{8}(x-2)(x-4)(x-6)$$

$$P_3(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{4}x^2-5x+8$$

$$P_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)

x	۲	۴	۶	۸
y	۴	۸	۱۴	۱۶

حل مثال:

$$P_3(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - 5x + 8$$