محاسبات عددی

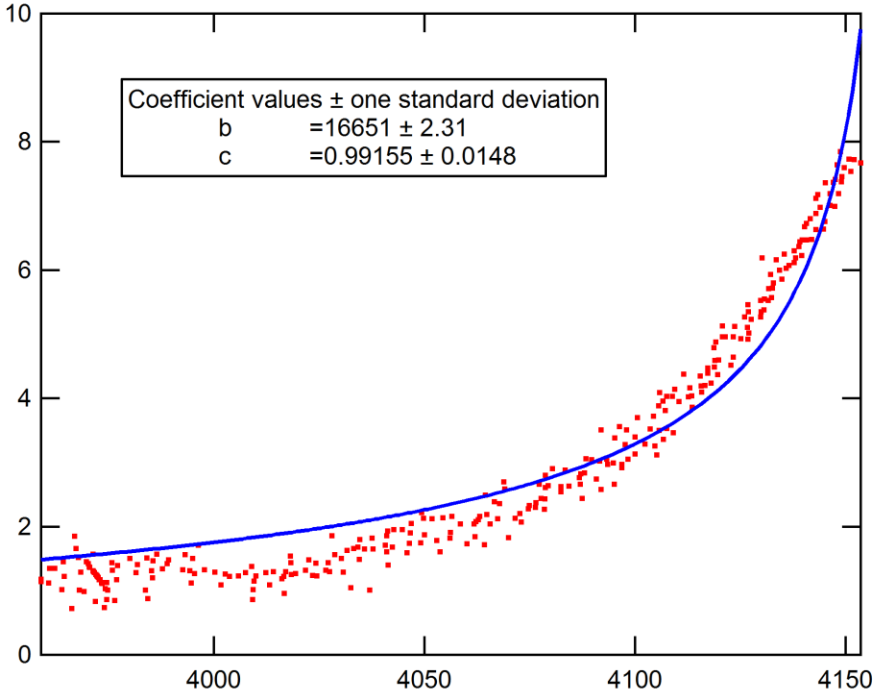
Numerical Analysis

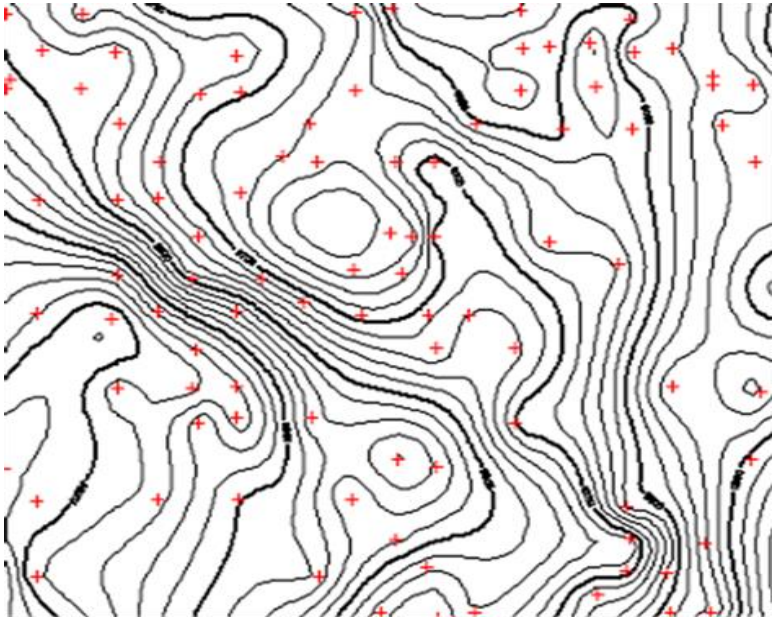
جلسه پنجم

درونیابی و برازش

برازش: هدف نشان دادن داده های گسسته در غالب یک تابع پیوسته است. یعنی یک تعداد دادهٔ پراکنده داریم و میخواهیم رابطه ای بین آنها بنویسیم که بهترین انطباق را بر تمامی داده ها داشته باشد و این قابلیت را نیز داشته باشد که مقادیر داده های دلخواه بعدی را نیز برآورد نماید. به این عملیات برازش منحنی (یا Curve Fitting) گفته می شود.

درونیابی: در برازشِ منحنی، هدف بدست آوردن هموار ترین منحنی است ولی در درونیابی (یا Interpolation) منحنیِ درونیابی از تمامی نقاط موجود عبور می کند. در برازش مرتبه یا نوع تابع برازش شده را (با توجه به دقت مورد نیاز) ما تعیین می کنیم ولی مرتبهٔ تابع در درونیابی به تعداد نقاط مورد درون یابی بستگی دارد





انواع روش های درونیابی

- **روش خط راست:** ساده ترین شیوهٔ درونیابی این است که بین دو نقطهٔ ابتدا و انتهای بازهٔ درون یابی یک خط راست رسم کرده و به این ترتیب عمل درون یابی خطی انجام می شود. البته این روش فقط بین دو نقطه قابلیت کاربرد دارد.

- **روش های چند جمله ای:** معمول ترین روش درون یابی از بین مجموعه ای از داده ها می باشد که مهمترین آنها روش **لاگرانژ** و روش **نیوتن** است. روش نیوتن خود به دو دستهٔ فواصل یکنواخت و فواصل غیر یکنواخت تقسیم می شود.

قضیه: چنانچه تعداد $n+1$ زوج دادهٔ متناظر $(x\ ،\ y)$ داشته باشیم و بخواهیم تا یک چند جمله ای از همهٔ آنها عبور بکند، **اولاً** بایستی مرتبهٔ چند جمله ای برابر با n باشد. **ثانیاً** بایستی ضرایب معادلهٔ چند جمله ای را از حل دستگاه معادلات خطی زیر بدست اوریم:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0^1 + \cdots + a_n x_0^n \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1^1 + \cdots + a_n x_1^n \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n^1 + \cdots + a_n x_n^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

انواع روش های درون یابی/ روش چند جمله ای

مثال: یک چند جمله ای با حداقل مرتبهٔ ممکن بیابید که از دو نقطهٔ [1,2] و [7, 9] عبور کند.

حل:

چون دو نقطه داریم، حداقل مرتبهٔ ممکن درجهٔ **یک** است و فرم کلی آن $y=a_1x+a_0$ است.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 = y_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7/6 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \rightarrow a_0=0.83 \quad a_1=1.17$$

$$y = a_0 + a_1x \rightarrow \boxed{y = 0.83 + 1.17x}$$

انواع روش های درون یابی / روش چند جمله ای

مثال: یک چند جمله ای با حداقل مرتبهٔ ممکن بیابید که از سه نقطهٔ [0,6] و [1, 0] و [2,2] عبور کند.

حل: سه نقطه داریم، حداقل مرتبهٔ ممکن درجهٔ **دو** است و فرم کلی آن $y=a_2x^2+a_1x+a_0$ است.

بنابراین همانند مثال قبل کافی است دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را تشکیل داده و آن را حل نماییم.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= 6 \\ a_1 &= -10 \\ a_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow \boxed{y = 6 - 10x + 4x^2}$$

معایب روش چند جمله ای:

- **افزایش نقاط باعث افزایش ضرایب و در نتیجه بالارفتن درجهٔ دستگاه معادلات می شود.**
- **حل چنین دستگاه هایی ساده نخواهد بود.**

انواع روش های درون یابی/ روش درون یابی لاگرانژ (Lagrange Interpolation)

دراینجا می خواهیم یک تابعی مانند $P(x)$ پیدا کنیم که اگر در آن هر یک از مقادیر x_i را قرار دهیم، مقدار متناظر f_i بدست آید. برای این منظور از چند جمله ای لاگرانژ استفاده میکنیم:

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i)=f_i$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

چند جمله ای یگانهٔ **لاگرانژ** که از $n+1$ نقطهٔ داده شده عبور می کند به فرم زیر است:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k \\ L_k(x) &= \begin{cases} 1 & x = x_k \\ 0 & x \neq x_k \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x_k) = y_k$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i},\ k=0,1,\cdots,n$$

$$L_k(x_k)=1,\ L_k(x_i)=0, x_i \neq x_k$$

انواع روش های درون یابی / روش درون یابی لاگرانژ (Lagrange Interpolation)

مثال: به کمک روش لاگرانژ یک چند جمله ای با حداقل مرتبهٔ ممکن بیابید که از سه نقطهٔ [0,6] و [1, 0] و [2,2] عبور کند.

x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 y_2

حل: ابتدا لازم است به تعداد نقاط موجود، ضریب $L_k(x)$ را محاسبه کنیم

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i},\ k=0,1,\cdots,n$$

$$\begin{cases} L_0(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\dfrac{x^2-3x+2}{2} \\ L_1(x)=\dfrac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}=\dfrac{x^2-2x}{-1} \\ L_2(x)=\dfrac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\dfrac{x^2-x}{2} \end{cases}$$

سپس ضرایب بدست آمده را در رابطه لاگرانژ جاگذاری می کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{k=0}^{2} L_k(x)y_k = L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2 \\ f(x)=\sum_{k=0}^{2} L_k(x)y_k = 6\times\left(\dfrac{x^2-3x+2}{2}\right)+0\times\left(\dfrac{x^2-2x}{-1}\right)+2\times\left(\dfrac{x^2-x}{2}\right) \\ \boxed{f(x)=4x^2-10x+6} \end{cases}$$

کد متلب روش درون یابی لاگرانژ

```
clc
clear
close all
%% Inpout %%
X_ha=[-1 3 9 12];
Y_ha=[4 11 12 19];

x=9;
%% Element Counter %%
n=numel(X_ha);
L=ones(1,n);
y=0;
%% Lagrange Calculation %%
    for i=1:n
        for j=1:n
            if (i~=j)
                L(1,i)=L(1,i).*(x-X_ha(j))/(X_ha(i)-X_ha(j));
            end
        end
        y=y+Y_ha(i)*L(1,i);
    end
%% Outpout %%
  disp(['y=' num2str(y)]);
```

(-1,4) (3, 11) (9, 12) (12, 19)

وارد کردن یک مقدار دلخواه x برای محاسبهٔ y متناظر آن

شمردن تعداد نقاط ورودی و ایجاد یک ماتریس با اندازهٔ متناسب با تعداد نقاط ورودی جهت محاسبهٔ ضرایب لاگرانژ

محاسبهٔ مقادیر ضرایب لاگرانژ و محاسبهٔ مقدار تابع y در x دلخواه

چاپ مقدار y محاسبه شده

کد متلب روش درون یابی لاگرانژ با قابلیت رسم نمودار تابع درون یابی شده

(جهت یادگیری بیشتر)

```
clc
clear
close all
X_ha=[-5 0 3 9 14];
Y_ha=[4 11 12 16 22];
kk=0;
for k=min(X_ha):1:max(X_ha)
   x=min(X_ha)+kk;
   kk=kk+1;
   X(kk, 1)=x;
%*************************************************************************
n=numel(X_ha);
L=ones(1,n);
y=0;
  for i=1:n
    for j=1:n
      if (i~=j)
        L(1,i)=L(1,i).*(x-X_ha(j))/(X_ha(i)-X_ha(j));
      end
    end
    y=y+Y_ha(i)*L(1,i);
  end
%*****************************************************************************
  Y(kk, 1)=y;
end
 %Display Plot%
 plot(X, Y)
```