محاسبات عددی

Numerical Analysis

جلسه دوم

تعاریف و معیارهای سنجش خطا

- خطای مطلق (Absolute Error)

$$E_{abs} = |\text{مدار واقعی} - \text{مقدار بدست آمده}| = \text{خطای مطلق}$$

مثال: اگر عدد ۵/۱۵۱۴ را تا دو رقم اعشار گرد کنیم میشود ۵/۱۵، بنابراین خطای مطلق برابر است با

$$E_{abs}=|5.1514-5.15|=0.0014$$

- خطای نسبی (Relative Error):

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{|x|} = \frac{|\text{مقدار واقعی} - \text{مقدار بدست آمده}|}{|\text{مقدار واقعی}|}$$

نکته: به منظور مقایسه دقت دو اندازه گیری حتماً می بایست از **خطای نسبی** استفاده شود.

تمرین: عدد ۳/۱۴۱۵۹۲ را تا دو رقم اعشار گرد کرده و درصد خطای نسبی را محاسبه نمایید.

تعاریف و معیارهای سنجش خطا

- حد بالای خطای مطلق

همواره مقدار دقیق یک کمیت معلوم نیست تا با تفاضل آن از مقادیر اندازه گیری شده مقدار خطا را به دست آورد. بنابراین حداکثر میزان دقت عدد اندازه گیری شده را حد بالای خطای مطلق می نامند.

به عنوان مثال: طول و عرض یک مستطیل برابر است با $x=800$ و $y=300$ متر. خطای نسبی وسیله اندازه گیری ۰/۰۲ است. مقدار خطای مطلق هر یک از اندازه گیری ها چند متر است؟

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{|y|} \Rightarrow 0.02 = \frac{E_{abs}}{300} \Rightarrow E_{abs} = 6 \ \ m \quad \text{و} \quad E_{rel} = \frac{E_{abs}}{|x|} \Rightarrow 0.02 = \frac{E_{abs}}{800} \Rightarrow E_{abs} = 16 \ \ m$$

خطای مطلق و خطای نسبی در اندازه گیری **مساحت** زمین چقدر است؟

$$S = 300 \times 800 = 240000 \ \ m^2 , \quad S_{max} = (300+6) \times (800+16) = 249696 \, m^2$$

$$E_{abs} = |240000 - 249696| = 9696 \, m^2 \qquad E_{rel} = 9696/240000 = 0.0404$$

درصد خطای نسبی نیز برابر است با:

$$0.0404 \times 100 = 4.04 \, \%$$

انباشتگی خطا طی چهار عمل اصلی

- **خطای مطلق در جمع:** کافی است خطاهای مطلق اعداد را با هم جمع کنیم

$$\boxed{|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| = |E_{abs}(a)+E_{abs}(b)| \le |E_{abs}(a)| + |E_{abs}(b)|}$$

مقادیر واقعی — مقادیر تقریبی — نامساوی مثلث

مثال– سه کمیت اندازه گیری شده عبارتند از: $10\ \text{cm} \pm 0.5\ \text{cm}$ ، $15\ \text{cm} \pm 1\ \text{cm}$ و $8\ \text{cm} \pm 0.7\ \text{cm}$

مطلوب است مقدار تقریبی حاصل جمع و خطای مطلق حاصل جمع این سه کمیت .

تذکر: وقتی گفته می شود که خطائی را در یک محاسبه پیدا کنید، بایستی بزرگترین خطای ممکن محاسبه شود.

حل–

مقدار تقریبی حاصل جمع: $10 + 15 + 8 = 33\ \text{cm}$

بزرگترین مقدار حاصل جمع: $(10 + 0.5) + (15 + 1) + (8 + 0.7) = 35.2\ \text{cm}$

خطای مطلق: $|35.2-33| = 2.2\ \text{cm}$

با استفاده از تذکر گفته شده در بالا و محاسبه‌ی مجموع یک به یک خطا در هر کمیت نیز می‌توان خطای مطلق را بدست آورد.

$$0.5 + 1 + 0.7 = 2.2\ \text{cm}$$

انباشتگی خطا طی چهار عمل اصلی

- خطای مطلق در تفریق: کافی است خطاهای مطلق اعداد را با هم جمع کنیم

$$\boxed{|(x-y)-(a-b)| = |(x-a)-(y-b)| = |E_{abs}(a)-E_{abs}(b)| \le |E_{abs}(a)| + |E_{abs}(b)|}$$

مثال–دو کمیت اندازه‌گیری شده عبارتند از: (12 ± 1) cm و (8 ± 0.5) cm

مقدار تقریبی تفاضل دو کمیت داده شده و خطای عمل تفاضل را بدست آورید.

جواب. مقدار تفاضل محاسبه شده مورد انتظار برابر است با $12 - 8 = 4$ و در رابطه با محاسبه خطا، با چهار حالت ممکن به شرح زیر سر و کار داریم:

$(12+1) - (8+0.5) \Rightarrow$ 13 cm - 8.5 cm = 4.5 cm

$(12-1) - (8+0.5) \Rightarrow$ 11 cm - 8.5 cm = 2.5 cm

$(12+1) - (8-0.5) \Rightarrow$ 13 cm - 7.5 cm = 5.5 cm

$(12-1) - (8-0.5) \Rightarrow$ 11 cm - 7.5 cm = 3.5 cm

ملاحظه میکنید که بزرگترین عدد حاصل از عمل تفاضل مقدار 5.5 است که در آن عدد کسر شونده کمترین مقدار (7.5) و عدد اولی بزرگترین مقدار (13) را دارد. خطای مطلق عمل تفاضل برابر است با: $E_{abs}=|5.5-4|=1.5$ cm. طبق قانون فوق از مجموع خطای مطلق یک به یک اعداد نیز بدست می آید: $E_{abs}= 1+0.5 =1.5$ cm

انباشتگی خطا طی چهار عمل اصلی

- **خطای مطلق در ضرب:** خطا با استفاده از فرمول زیر حساب می شود

$$|xy - ab| = |(a + E_{abs}(a)) \times (b + E_{abs}(b)) - ab|$$

$$= |ab + a \times E_{abs}(b) + b \times E_{abs}(a) + E_{abs}(a) \times E_{abs}(b) - ab|$$

$$= |a \times E_{abs}(b) + b \times E_{abs}(a)| \le |a \times E_{abs}(b)| + |b \times E_{abs}(a)|$$

$$\boxed{|xy - ab| = |(a + E_{abs}(a)) \times (b + E_{abs}(b)) - ab|}$$

$$= \boxed{|\cancel{ab} + a \times E_{abs}(b) + b \times E_{abs}(a) + \underbrace{\cancel{E_{abs}(a) \times E_{abs}(b)}}_{\approx 0} - \cancel{ab}|} \rightarrow \boxed{E_{abs}(a) \times E_{abs}(b) \approx 0}$$

$$= \boxed{|a \times E_{abs}(b) + b \times E_{abs}(a)|} \le \boxed{|a \times E_{abs}(b)| + |b \times E_{abs}(a)|}$$

مثال– دو کمیت اندازه گیری شده عبارتند از: $x = (12 \pm 0.0005)$ cm و $y = (8 \pm 0.0005)$ cm . مطلوب است مقدار تقریبی حاصلضرب دو عدد و خطای عمل ضرب.

حل– مقادیر تقریبی x و y به ترتیب برابرند با $a = 12$ و $b = 8$

مقدار حاصلضرب مورد انتظار: $a \times b = 12 \times 8 = 96\ cm^2$.

حداکثر مقدار حاصلضرب: $(12 + 0.0005) \times (8 + 0.0005) = 96.01\ cm^2$ و خطای مطلق: $E_{abs} = |96.01 - 96| = 0.01$

با استفاده از فرمول مربوط به محاسبه‌ی خطای حاصلضرب هم حل کنیم خواهیم داشت:

$$E_{abs}(a \times b) = 12 \times 0.0005 + 8 \times 0.0005 = 0.01$$

انباشتگی خطا طی چهار عمل اصلی

- **خطای مطلق در تقسیم:** خطا با استفاده از فرمول زیر حساب می شود

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a+E_{abs}(a)}{b+E_{abs}(b)}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{ab+bE_{abs}(a)-ab-aE_{abs}(b)}{b\left(b+E_{abs}(b)\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{bE_{abs}(a)-aE_{abs}(b)}{b^2\left(1+\frac{E_{abs}(b)}{b}\right)}\right| \le \frac{|b|\times E_{abs}(a)+|a|\times E_{abs}(b)}{b^2}$$

$$\boxed{\left|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a+E_{abs}(a)}{b+E_{abs}(b)}-\frac{a}{b}\right|} = \boxed{\left|\frac{\cancel{ab}+bE_{abs}(a)-\cancel{ab}-aE_{abs}(b)}{b\left(b+E_{abs}(b)\right)}\right|}$$

$$= \boxed{\left|\frac{bE_{abs}(a)-aE_{abs}(b)}{b^2\left(1+\boxed{\frac{E_{abs}(b)}{b}}\right)}\right|} \le \boxed{\frac{|b|\times E_{abs}(a)+|a|\times E_{abs}(b)}{b^2}}$$

$$\boxed{\frac{E_{abs}(b)}{b}\approx 0}$$

نکته: برای این که از این فرمول نسبتاً پیچیده استفاده نکنیم بهتر است که تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و از فرمول خطای ضرب استفاده کنیم.

انباشتگی خطا طی چهار عمل اصلی

- خطای نسبی طی چهار عمل اصلی:

از آنجایی که روش محاسبه خطای مطلق گفته شد، به سادگی میتوان با استفاده از تعریف خطای نسبی و یک عمل تقسیم و برخی ملاحظات ریاضیاتی، مقدار خطای نسبی را نیز محاسبه کرد.

$$\frac{E_{abs}(a)}{|a|},\frac{E_{abs}(b)}{|b|} \quad E_{rel}(a+b)=\frac{E_{abs}(a+b)}{|a+b|}=\max$$

{خطای نسبی در عمل جمع}

$$E_{rel}(a-b)=\frac{E_{abs}(a-b)}{|a-b|}=\frac{E_{abs}(a)+E_{abs}(b)}{|a-b|}$$

{خطای نسبی در عمل تفریق}

$$E_{rel}(ab)=\frac{E_{abs}(ab)}{|ab|}\cong\frac{E_{abs}(a)}{|a|}+\frac{E_{abs}(b)}{|b|}$$

{خطای نسبی درعمل ضرب}

$$E_{rel}(a/b)=\frac{E_{abs}(a/b)}{|a/b|}\cong\frac{E_{abs}(a)}{|a|}+\frac{E_{abs}(b)}{|b|}$$

{خطای نسبی در عمل تقسیم}

ارزیابی خطا در توابع چند متغیره

به منظور ارزیابی خطا در توابع n متغیره $U=f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ از رابطه زیر استفاده می شود:

$$|\Delta U| = |(f(x_1 + E_{abs}(x_1), x_2 + E_{abs}(x_2), \cdots, x_n + E_{abs}(x_n)) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$$

$$|\Delta U| \cong \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \times E_{abs}(x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \times |E_{abs}(x_i)|$$

$$\boxed{|E_{abs}(U)| \cong \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \times |E_{abs}(x_i)|}$$

ارزیابی خطا در توابع یک متغیره

اگر x یک مقدار تحقیقی و a یک مقدار تقریبی از آن باشد و اگر تابع f(x) را با f(a) تقریب بزنیم، آنگاه حداکثر خطای مطلق این کار (یعنی $E_{abs}= |f(x)-f(a)|$) را می توان با استفاده از بسط تیلور بدست آورد. زیرا در بسط تیلور داریم:

$$f(x)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots$$

که در آن h=x-a است. بنابراین می توان نوشت:

$$f(x)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots$$

از آنجایی که در این رابطه h=x-a مقدار کوچکی است، بنابراین توان های بالاتر از این مقدار نیز به مراتب کوچک هستند و قابل چشم پوشی هستند، پس رابطه به صورت زیر خلاصه می شود:

$$f(x)-f(a)\cong f'(a)(x-a)$$

بدین ترتیب رابطه خطای مطلق برابر است با:

$$E_{abs}(f(x))\cong |f'(a)|\times E_{abs}(a)$$

بعلاوه برای محاسبه خطای نسبی نیز می توان نوشت:

$$E_{rel}(a)=\frac{|f'(a)|\times E_{abs}(a)}{|f(a)|}=\frac{|f'(a)|}{|f(a)|}\times E_{abs}(a)=|(\ln f(a))'|\times E_{abs}(a)$$

مثال: حجم کره ای به شعاع $5/3$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را بدست آورید. اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید:

داریم : $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و یا $V = xyz^۳$ که در آن

$$x = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳۳۳ + e_x \quad , \quad e_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$y = \pi = ۳/۱۴۱۶ + e_y \quad , \quad e_y \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$z = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۶۶۷ + e_z \quad , \quad e_z \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

بدین ترتیب داریم:

$$V = (۱/۳۳۳۳)(۳/۱۴۱۶)(۱/۶۶۶۷)^۳ + e_V$$

$$V = ۱۹/۳۹۳۳ + e'_V \longrightarrow e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_V \longrightarrow e_V \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$e_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}\{yz^۳ + xz^۳ + ۳xyz^۲\}$$

مقدار سمت راست به ازای $x = ۱/۳۳۳۳$، $y = ۳/۱۴۱۶$ و $z = ۱/۶۶۶۷$ به صورت زیر

$$e_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵}\{۱۴/۵۴۵۳ + ۶/۱۷۳۱ + ۳۴/۹۰۷۲\} \Rightarrow e_V \leq ۰/۰۰۲۸ \Rightarrow e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + ۰/۰۰۲۸$$

در نتیجه $V = ۱۹/۳۹۳۳ \pm ۰/۰۰۲۸۵$

خطای محاسبه توابع در بسط تیلور

در این محاسبات با خطای برش مواجه هستیم که از باقیمانده سری ناشی می شود.

مثال: مقدار تقریبی تابع sin (x) را به ازای $x=\pi/7$ و با خطای کمتر از 10^{-3} محاسبه کنید:

$$\sin x = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \pm \cdots$$

$$x = \frac{\pi}{۷} = \pi\frac{۱}{۷} = ۳/۱۴۱۶ \times ۰/۱۴۲۹ = ۰/۴۴۸۹$$

بایستی n را طوری تعیین کنیم که

$$\frac{(۰/۴۴۸۹)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

برای $n \geq ۲$ نامساوی فوق برقرار می‌باشد، در نتیجه

$$\sin\frac{\pi}{۷} \simeq ۰/۴۴۸۹ - \frac{(۰/۴۴۸۹)^{۳}}{۳!} + \frac{(۰/۴۴۸۹)^{۵}}{۵!} = ۰/۴۴۸۹ - ۰/۰۱۵۱ + ۰/۰۰۰۲ = ۰/۴۳۴۰$$

با سه رقم اعشار خواهیم داشت :

$$\sin\frac{\pi}{۷} \simeq ۰/۴۳۴$$