محاسبات عددی

Numerical Analysis

جلسه اول

خطاها:

- خطای گرد کردن (Round-off Error)
  - قوانین گرد کردن
  - ارقام بامعنی (Significant digits)
- تعاریف و معیارهای سنجش خطا
  - خطای مطلق (Absolute Error)
  - خطای نسبی (Relative Error):
- انباشتگی خطا طی چهار عمل اصلی
- ارزیابی خطا در توابع چند متغیره
- خطای محاسبه توابع در بسط تیلور

ریشه یابی:

- روش های بازه ای (Bracketing Methods)
  - روش نصف کردن (Bisection Method)
  - روش وتر (False Position or Regula Falsi)

- روش های باز (Open Methods)
  - روش مماس یا روش نیوتن-رافسون
  - روش سکانت (Secant Method)
  - روش نقطه ثابت (Fixed Point Method)

روش های درون یابی و برازش:

- روش چند جمله ای
- روش درون یابی لاگرانژ (Lagrange Interpolation)
- روش درون یابی نیوتن (Newton Interpolation)
  - پیشرو
  - پسرو

روش های انتگرال گیری عددی:

- انتگرال گیری عددی مبتنی بر روش نیوتن –کوتز
  - مقدمه ای بر مجموعهٔ ریمان
  - روش یا قاعدهٔ ذوزنقه
  - روش سیمپسون
  - الگوریتم رومبرگ

روش های مشتق گیری عددی:

- روش های مشتق گیری عددی
  - چند جمله ای درونیاب
  - بسط تیلور
  - فرمول ریچاردسون

برازش منحنی

برازش منحنی یا Curve Fitting:

- برازش خط راست (Regression)
- برازش منحنی نمایی
- برازش منحنی هذلولی
- برازش منحنی چند جمله ای

حل دستگاه

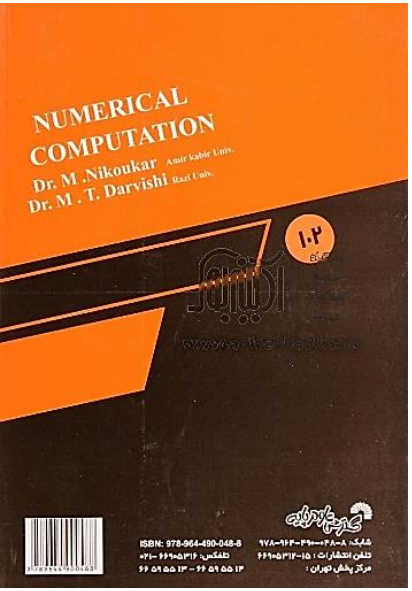
حل دستگاه معادلات خطی (Linear System of Equations):

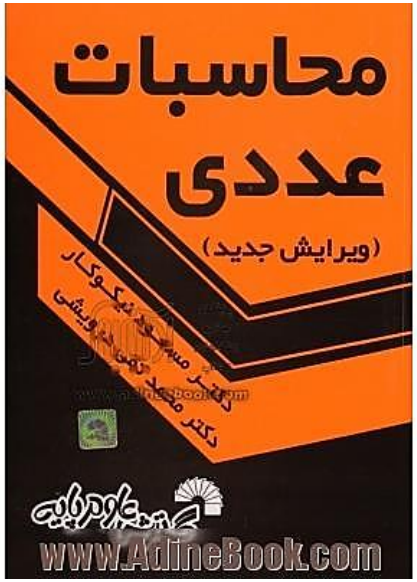
- روش های مستقیم
  - معکوس ماتریس ضرایب
  - روش کرامر
  - روش های حذفی
    - حذف ساده گوس
    - حذف گوس با محوریت نسبی قیاسی
- روش های غیر مستقیم
  - روش ژاکوبی
  - روش گوس- سیدال

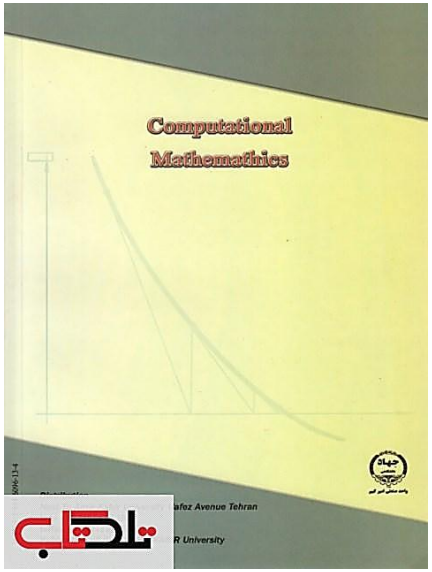
محاسبات عددی

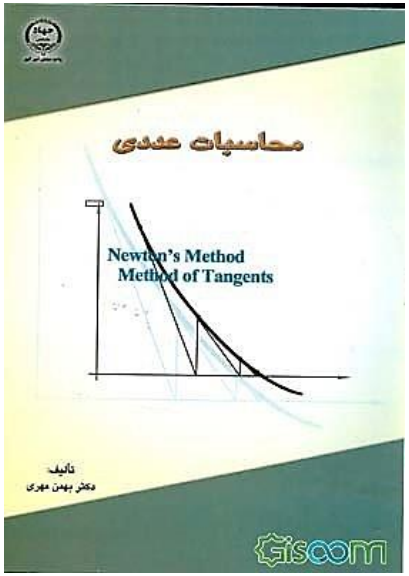
مقدمه

- اختراع کامپیوتر از عوامل اصلی توسعه علم محاسبات عددی است.
- نحوه استفاده از کامپیوتر در زمینه محاسبات عددی نیاز به استاندارد سازی دارد.









محاسبات عددی

خطا ها:

۱- منابع خطا

- {خطای داده. - خطای مدل.} {خطای اعمال حسابی. - خطای نمایش اعداد. - خطای روش.}

به نوع مسئله و ساده سازی هایی بکار رفته در مدل آن و همچنین اطلاعات ورودی مسئله بستگی دارند

به محاسبات عددی بستگی دارند

محاسبات عددی

خطا ها:

۱- منابع خطا

- خطای داده: اغلب در اندازه گیری داده ها و مفروضات مسئله پیش می آید.
- خطای مدل: شامل ساده نویسی ها و صرفنظر کردن ها جهت تعیین مدل ریاضی
- خطای اعمال حسابی: در محاسبات عملی که روی ۲ عدد صورت می گیرد گاهی حاصل عمل دارای تعداد نامتناهی رقم است که انتخاب تعداد متناهی از آن سبب این خطا می شود.

مثال: حاصل تقسیم یا کسر $\frac{1}{3} = \ldots 0.33333333$ به تعداد نامتناهی رقم اعشار دارد. با صرفنظر کردن از تمامی ارقام اعشار خطای عمل حسابی رخ می دهد. این خطا به خطای گرد کردن شناخته می شود.

- خطای نمایش اعداد: نمایش اعشاری یا دودویی اکثر اعداد با تعداد نامتناهی رقم امکان پذیر نیست. لذا انتخاب تعداد متناهی از ارقام بسط یک عدد موجب این خطا می شود.

مثال: عدد پی یا همان π دارای تعداد نامتناهی ارقام اعشاری است که ذخیره تعداد متناهی از ارقام آن به خاطر محدودیت های سخت افزاری منجر به خطای نمایش می شود.

- خطای روش: از آنجا که روش های عددی تکراری اند و تقریبی از جواب را بدست می دهند؛ لذا دقت این ترکیب بستگی به نوع روش، زمان و مرحله توقف آن دارد. نام این نوع خطاها، خطای برش است.

منابع خطا

۱- خطای برش (Truncation Error)

به دلیل محدودیت های سخت افزاری کامپیوترها و ماشین حساب ها برخی تقریب های ریاضی در فرمول های اساسی بکار گرفته می شود. مثلاً تعداد تکرار عملیات محاسباتی در بسط تیلور (Taylor series):

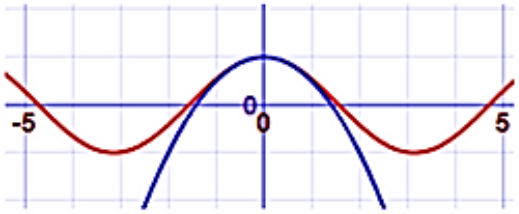
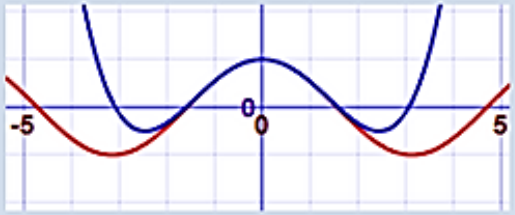
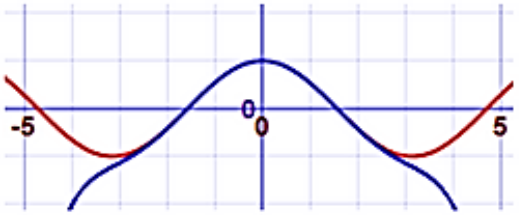
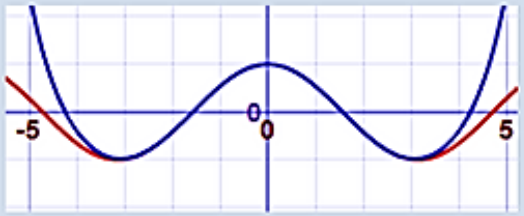
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$+\infty$

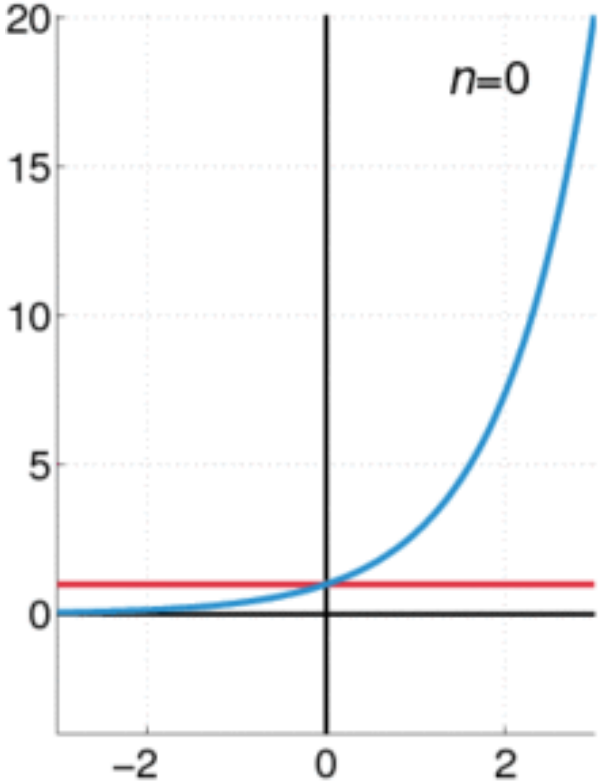
بسط مک لوران همان بسط سری تیلور حول نقطه صفر ($X_0=0$) است که اغلب در توابع مثلثاتی کاربرد دارد.

بسط تیلور حول $X_0=0$ (مک لورن)

بسط مک لورن تابع سینوس

$1-\frac{x^2}{2!}$	
$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$	
$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$	
$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$	

بسط مک لورن تابع نمایی



منابع خطا

۱- خطای گرد کردن (Round-off Error)

اعداد گنگی که در محاسبات مورد استفاده قرار می گیرند، معمولاً اعدادی تقریبی هستند زیرا نتیجه اندازه گیری ها یا محاسباتی هستند که در گذشته انجام شده است. از طرفی حافظه کامپیوترها در نمایش و ذخیره سازی همین اعداد تقریبی نیز محدودیت داشته و خطای مضاعفی را به وجود می آورند. بنابراین نمایش اعداد گنگ کم یا بیش دارای خطای گرد کردن است.

قوانین گرد کردن

این قوانین برای استانداردسازی گردکردن اعداد در تمامی سامانه های رایانه ای و محاسباتی بکار میروند.

برای گرد کردن یک عدد تا n رقم اعشار می بایست رقم n+1ام اعشار و تمامی رقم های اعشار بعد از آن را با در نظر گرفتن ضوابط زیر کنار بگذاریم.

۱– اگر رقم n+1ام (یا رقم کنار گذاشته شده) **بزرگتر** از ۵ باشد یا **برابر** با ۵ بوده و رقم بعد از آن نیز مخالف صفر باشد، به رقم nام یک واحد اضافه می کنیم.

مثلاً: عدد ۱/۲۷۵۶ تا دو رقم اعشار گرد شود برابر است با ۱/۲۸

۲– اگر رقم n+1ام (یا رقم کنار گذاشته شده) کوچکتر از ۵ باشد آنگاه رقم nام را بدون تغییر باقی می گذاریم. مثلاً: عدد ۵/۲۳۴۶ – تا دو رقم اعشار گرد شود برابر است با ۵/۲۳ –

۳– اگر رقم n+1ام برابر با ۵ بوده و بعد از آن هم رقمی وجود نداشته باشد (یا صفر باشد)، اگر رقم nام زوج باشد، آن را تغییر نمیدهیم، ولی اگر فرد باشد، رقم nام را با اضافه کردن یک واحد زوج میکنیم.

مثال: (تا دو رقم اعشار گرد کنید) -2.635 ➔ -2.64 1.345 ➔ 1.34

خطای گرد کردن

هر عددی که با استفاده از قوانین ذکر شده، تا n رقم اعشار گرد شده باشد، حداکثر خطای آن برابر است با:

$$Round\ Error_{(n)} \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

عدد دقیق	مقدار گرد شدن	عدد گرد شده	حداکثر خطای گرد کردن
3.141592	تا 2 رقم اعشار	3.14	0.5×10^{-2}
3.141592	تا 3رقم اعشار	3.142	0.5×10^{-3}
0.66666	تا 1رقم اعشار	0. 7	0.5×10^{-1}
7.1355	تا 3 رقم اعشار	7.136	0.5×10^{-3}
8.2345	تا 3 رقم اعشار	8.234	0.5×10^{-3}
7.1355001	تا 3 رقم اعشار	7.136	0.5×10^{-3}
8.2345001	تا 3 رقم اعشار	8.235	0.5×10^{-3}

ارقام بامعنی (Significant digits)

در ریاضیات، اعداد 2.50، 2.500 و 2.5000 برابر هستند. ولی در بعضی علوم به ویژه علومی که با اندازه‌گیری سر و کار دارند، مانند فیزیک و شیمی و نظایر آنها، چنین اعدادی مساوی هم به حساب نمی‌آیند. اگر اعداد فوق نتیجه‌ی اندازه‌گیری‌های یک طول بر حسب متر هستند، عدد 2.50 دقت اندازه گیری را تا حد سانتیمتر و عدد 2.500 دقت اندازه گیری را تا حد میلی‌متر نشان می‌دهد. به عبارت دیگر صفرهای درج شده در جلوی این اعداد معرف نوعی دقت در اندازه گیری هستند. بنابراین با توجه به موارد گفته شده نتیجه می‌گیریم که ارقام با معنی یکی از ابزارهای اساسی در تعیین میزان دقت اعداد مورد استفاده بوده و تعداد ارقام با معنی، درستی و دقت اندازه‌گیری را نشان میدهد. تعداد ارقام بامعنی در نتیجه نهائی یک محاسبه، بستگی به تعداد ارقام با معنی در هر یک از داده های بکار رفته در آن محاسبه دارد. دراین قسمت چگونگی تشخیص ارقام با معنی به دو صورت متفاوت بیان شده است.

نکاتی در مورد ارقام با معنی

- ارقام ۱ الی ۹ به عبارت دیگر کلیه ارقام مخالف صفر وکلیه صفرهای درج شده دربین آنها بامعنی هستند.
- اگر عدد داده شده دارای نقطه اعشار باشد، صفرهای موجود در این عدد موقعی ارقام با معنی به حساب می آیند که در مکانی از سمت چپ آنها رقمی مخالف صفر وجود داشته باشد .
- اگر عددی فاقد نقطه اعشار باشد، در مورد معنی‌دار بودن یا نبودن صفرهای درج شده درانتهای آن نمیتوان اظهار نظر کرد مگر اینکه آن را به صورت ممیز شناور نرمال شده یا هنجار شده به شرح زیر نشان دهیم.

ارقام بامعنی (Significant digits)

ممیز شناور هنجار شده Normalized Floating Point:

تعریف: تعداد ارقام بامعنی یک عدد حقیقی برابر است با تعداد ارقام قسمت اصلی(مانتیس) نمایش آن عدد به صورت ممیز شناور هنجارشده. بنابراین وقتی عددی را به صورت ممیز شناور نرمال شده نشان دهیم کلیه ارقام که سمت چپ توان ده (نما) و سمت راست نقطه اعشارظاهر شوند با معنی هستند.

مثال ۱- عدد 8200 دارای چند رقم با معنی است؟

جواب. در عدد داده شده ارقام ۸ و ۲ با معنی هستند، ولی در مورد صفرهای آخر عدد نمیتوانیم اظهار نظر کنیم مگر اینکه عدد داده شده را به صورت ممیز شناور هنجار شده نشان دهیم.

- اگر $8200=0.8200\times10^{+4}$ آنگاه عدد داده شده دارای ۴ رقم با معنی است.
- اگر $8200=0.820\times10^{+4}$ آنگاه عدد داده شده دارای ۳ رقم با معنی است.
- اگر $8200=0.82\times10^{+4}$ آنگاه عدد داده شده دارای ۲ رقم با معنی است.

مثال ۲- عدد π = ...3.14159 را تا چهار رقم بامعنی گرد کرده حداکثر خطای گردکردن را بدست آورید.

جواب. اگرعدد π را به صورت ممیزسیار نشان دهیم خواهیم داشت $\pi = 0.314159\ldots\times10^{+1}$. مقدار تقریبی عدد بعد ازگردکردن برابر است با 3.142 و بازه خطا طبق فرمول برابر است با $Round_3(\pi) \le 0.5\times10^{-3}$.

در نتیجه حداکثر مقدار خطا خواهد شد: 0.5×10^{-3}