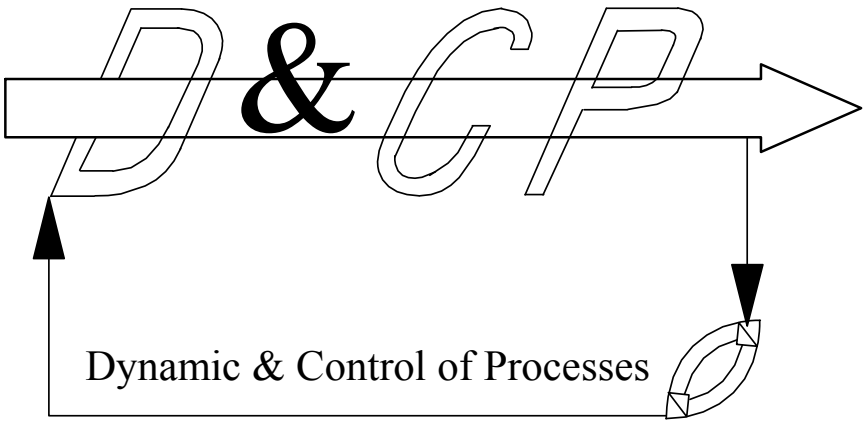
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی پلیمر

کنترل فرآیندها



تهیه و تنظیم:
دکتر مهدی رفیع‌زاده

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

فصل اول - مقدمه و مفاهیم اولیه کنترل فرآیندها

۱-۱- مقدمه ۱

۱-۲- عملکرد یک سیستم کنترلی ۲

۱-۳- لزوم کنترل فرآیند ۵

۱-۴- چگونگی اعمال سیستم کنترلی ۵

۱-۵- مراجع ۶

فصل دوم - مروری بر تبدیل لاپلاس

۲-۱- مقدمه ۷

۲-۲- مفاهیم اساسی ۷

۲-۳- تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال یک تابع ۱۰

۲-۴- انتقال روی محور s و محور t ۱۲

۲-۵- کسرهای جزئی ۱۴

۲-۶- ماهیت کیفی جواب ۱۷

۲-۷- قضیه مقدار نهائی و مقدار اولیه ۱۸

۲-۸- خلاصه ۱۸

۲-۹- مراجع ۱۹

فصل سوم - مدل‌سازی دینامیکی و تابع انتقال فرآیندها

۳-۱- مقدمه ۲۰

۳-۲- یک مثال مقدماتی ۲۰

۳-۳- خواص تابع انتقال ۲۴

۳-۴- بررسی دینامیک فرایند ۲۵
۳-۵- سیستم‌های درجهٔ اول در حالت سری ۲۷
۳-۵-۱- دو تانک ارتفاع در حالت سری و بدون اثر متقابل ۲۹
۳-۵-۲- دو تانک ارتفاع در حالت سری و با اثر متقابل ۳۰
۳-۶- سیستم درجهٔ دوم ۳۲
۳-۷- مشخصه‌های پاسخ پله‌ای تحت میرای سیستم درجهٔ دوم ۳۴
۳-۸- سیستم غیر خطی ۳۵
۳-۹- زمان مرده ۳۷
۳-۱۰- شناسائی سیستم ۳۸

فصل چهارم - سیستم حلقه بسته

۴-۱- مقدمه ۳۹
۴-۲- سیستم گرمایش یک مایع ۳۹
۴-۲-۱- تابع انتقال فرآیند ۴۲
۴-۲-۲- تابع انتقال المان اندازه‌گیری و المان نهائی کنترل ۴۳
۴-۲-۳- تابع انتقال کنترلر ۴۴
۴-۳- تابع انتقال حلقه بسته ۴۵
۴-۴- پاسخ سیستم حلقه بسته ۴۷

فصل پنجم - روش مکان ریشه‌ها در طراحی کنترلر

۵-۱- مقدمه ۵۰
۵-۲- پایداری سیستم ۵۰
۵-۳- تست روث ۵۲
۵-۴- مکان ریشه‌ها ۵۳

۵-۵- معیارهای تعیین مکان ریشه‌ها ۵۷
۵-۶- طراحی کنترلر ۵۸
۵-۶-۱- روش جانمائی قطب ۵۹
۵-۶-۲- روشهای یک معیاری در طراحی کنترلر ۵۹
۵-۶-۳- معیارهای انتگرالی در طراحی کنترلر ۶۰
۵-۷- روش Cohen-Coon ۶۳
۵-۸- روش تجربی تنظیم کنترلر ۶۵

فصل ششم - روش پاسخ فرکانسی برای طراحی کنترلر

۶-۱- مقدمه ۶۶
۶-۲- قانون جایگذاری ۶۶
۶-۳- دیاگرام بد ۶۸
۶-۴- دیاگرام بد برای حاصلضرب چند سیستم ۶۹
۶-۵- معیار پایداری بد ۷۱
۶-۶- روش زیگلر-نیکولز برای طراحی کنترلر ۷۳

فصل هفت - روش فضای حالت در طراحی کنترلر

۷-۱- مقدمه ۷۵
۷-۲- مدل فضای حالت ۷۶
۷-۳- انتقال حالت ۷۸
۷-۴- پاسخ دینامیکی بر اساس معادلات حالت ۷۹
۷-۵- طراحی کنترلر برای مدل فضای حالت کامل ۸۰
۷-۵-۱- انتخاب دستور کنترلی ۸۰

فصل هشت - کنترل عددی

۸-۱- مقدمه ۸۱

۸-۲- نمونه‌برداری ۸۱

۸-۳- توسعه مدل گسسته در فضای زمان ۸۴

۸-۴- تبدیل z ۸۵

ضمیمه الف - طراحی کنترلر دمای رآکتور ناپیوسته پلیمریزاسیون متیل‌متاکریلات

الف-۱- مقدمه ۸۷

الف-۲- کنترل پلیمریزاسیون ناپیوسته ۸۸

الف-۳- تقریب حالت شبه پایدار ۹۰

الف-۴- تابع انتقال ۹۰

الف-۵- طراحی کنترلر ۹۶

الف-۶- تنظیم کردن کنترلر ۹۷

الف-۷- اعمال کنترلر بر روی فرآیند ۱۰۱

الف-۸- نتایج آزمایش کنترلر ۱۰۱

فصل اول

مفاهیم اولیه کنترل فرآیندها

۱-۱- مقدمه

یک مهندس خوب همواره باید درک کاملی از هدف داشته باشد، زیرا ممکن است که چنان با جزئیات مشغول شود که مسیر را فراموش کرده و یا گم کند. کنترل فرآیند در مطالعه دینامیک یک فرآیند جدید از اصول ریاضی و مهندسی (که قبلا فرا گرفته شده‌اند) استفاده می‌کند. در این فصل مفاهیم اساسی و هدف کنترل فرآیند ارائه می‌شود تا خواننده هدف کلی اتوماسیون را فهمیده و نیاز به بخش‌های مختلف این کتاب را درک کند.

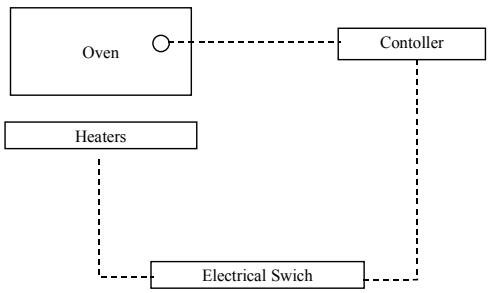
مطالعه کنترل فرآیند ماهیتا به عملکرد دینامیکی فرآیند می‌پردازد. درس‌های قبلی دانشجویان مهندسی شیمی و پلیمر نظیر انتقال جرم، عملیات واحد، سینتیک و طراحی رآکتورهای شیمیائی، مهندسی پلاستیک، طراحی دستگاه‌های مبدل حرارتی و جرمی و مهندسی الاستومر و ۰۰۰ در خصوص وضعیت پایدار بحث می‌کند. در طراحی یک فرآیند و محاسبه اندازه دستگاه‌های مختلف فرض معمول ثابت بودن شرایط فرآیند است. در حالیکه هیچ دستگاهی در طول عمر مفید خود دقیقا حالت پایدار (تغییرات صفر) عمل نمی‌کند. اگر در کنار یک دستگاه شکل دهی نظیر قالبگیری بادی بایستید، مشاهده می‌شود که دمای بخش‌های مختلف حول مقدار ثابتی نوسان کرده، سطح ماده در قیف تغذیه کم و زیاد شده و ۰۰۰، لذا نتیجه‌گیری می‌شود که جهان دینامیک است. تنها با دانستن رفتار گذرای[1] فرآیند است که مهندسین می‌توانند فرآیند مناسبی در این جهان دینامیک طراحی کنند. این کتاب در نظر دارد که مفاهیم و روش‌های عملی بررسی دینامیک فرآیندها را طراحی کنترلر مناسب و اعمال این سیستم‌ها بر روی دستگاه‌ها را با دیدگاه کاربردی آموزش دهد.

مهندسی کنترل در رشته‌های متفاوتی مانند مهندسی برق، مکانیک، پزشکی، شیمی، پلیمر و متالورژی آموزش داده می‌شود. دانش آموختگان هر یک از این رشته‌ها، کنترل را برای عملیات مناسب فرآیندهایی که مطالعه می‌کنند، بکار می‌برند. وظیفه یک مهندس خوب بطور خلاصه عبارت است از طراحی، ساخت و انجام مناسب

سیستم‌های فیزیکی بوده، لذا یکی از اجزاء لاینفک آن نگه داشتن شرایط مناسب فرآیند یا همان مهندسی کنترل فرآیند است [۱].

۱-۲- عملکرد یک سیستم کنترلی

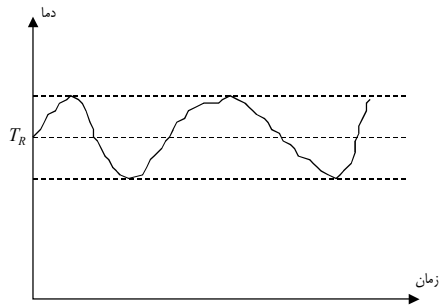
اصول کلی اغلب سیستم‌های کنترلی مشابه می‌باشد. لذا در این بخش با چند مثال ساده این اصول معرفی می‌گردند. شکل ۱-۱ شماتیک یک سیستم گرمایش مانند یک آون را نشان می‌دهد. مسلما هدف آن است که دمای داخل آون برابر یک مقدار تنظیم T_R باشد. دمای داخل آون T با ترموکوپل اندازه‌گیری می شود. این دما توسط یک ترموستات با مقدار تنظیم مقایسه می‌شود. اگر $T < T_R$ باشد، آنگاه هیتر الکتریکی روشن شده و اگر $T > T_R$ باشد، آنگاه هیتر خاموش شده و فن[۲] (در صورت وجود) روشن می‌شود. شکل ۱-۲ تاریخچه دمای داخل آون را نشان می‌دهد. همانگونه شکل نشان می‌دهد، دمای آون در اطراف دمای تنظیم نوسان غیر منظمی دارد. این روش کنترلی را روش on/off می‌نامند.



شکل ۱-۱- کنترل دمای یک تانک

---

[۱] Transient response
[۲] Fan



شکل ۱-۲- تاریخچه دمای داخل آون

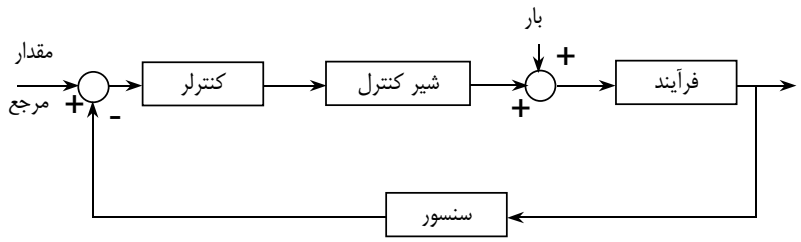
یک سیستم ملموس‌تر، شخصی است که در حال رانندگی می‌باشد. معمول‌ترین هدف رانندگی باقی ماندن در جاده و ما بین خطوط رانندگی می‌باشد. ابتداء راننده با دیدن محل اتومبیل بر روی جاده را تعیین می‌کند. سپس تصمیم می‌گیرد که چه مقدار با وضعیت مناسب اتومبیل اختلاف دارد. در ادامه، با توجه به مهارت خود و قابلیت‌های اتومبیل مقدار تغییر سرعت، موقعیت فرمان، شماره دنده و ۰۰۰ را محاسبه می‌کند. در انتها با اعمال تغییر محاسبه شده از طریق فرمان، ترمز و گاز و ۰۰۰، اتومبیل را در جاده نگه می‌دارد. راننده می‌بایست این فعالیت‌ها را دائما انجام دهد.

با بررسی این دو مثال، اکنون می‌توان مفاهیم اولیه را استخراج کرد. اولین مفهوم **متغیر کنترل‌شونده**[۳] بوده که در مثال‌های فوق دمای آون و موفعیت اتومبیل متغیرهای کنترل‌شونده می‌باشند. دومین مفهوم **نقطهٔ تنظیم** [۴]بوده که مقدار مناسب متغیر کنترلی را نشان می‌دهد. نقطهٔ تنظیم ممکن است ثابت یا متغیر با زمان باشد. در مثال آون معمولا نقطه تنظیم ثابت بوده در حالیکه به هنگام رانندگی نقطه تنظیم متغیر است. سومین مفهوم **المان اندازه‌گیری**[۵] بوده که برای تعیین لحظه‌ای مقدار متغیر کنترل شونده بکار می‌رود. چهارمین مفهوم، **الگوریتم**[۶] بوده که همان محاسباتی است انجام می‌گیرد تا مقدار تغییرات را مشخص کند. پنجمین مفهوم، ***متغیر کنترل‌کننده***[۷] است که با تغییر آنها متغیر کنترل‌شونده به مقدار تنظیم میرسد. در مثال‌های فوق توان ورودی به

---

[۳] Controlled variable
[۴] Set point
[۵] Measuring element
[۶] Algorithm
[۷] Manipulated variable

هیتر یا تغییر چرخ‌ها با فرمان متغیرهای کنترل‌کننده می‌باشند. ششمین مفهوم، **المان نهای کنترل**[۸] است که تغییرات بر متغیر کنترل‌کننده را اعمال می‌کند. بطور مثال، در سیستم گرمایش کلید الکتریکی و در اتومبیل فرمان نقش المان نهائی کنترل را ایفا می‌کنند. شکل ۱-۳ اجزاء کنترلی بحث شده را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳- اجزای یک سیستم کنترلی

اگر دقت شود در مثال‌های فوق متغیر کنترل شونده اندازه‌گیری شده و با توجه به انحراف آن از مقدار تنظیم، تصمیم کنترلی اتخاذ می‌شود. این منطق را **کنترل فیدبک**[۹] می‌نامند. در مقابل کنترل فیدبک، منطق دیگری به نام **کنترل فیدفوروارد**[۱۰] بوده که بعدا به آن پرداخته خواهد شد.

دو مفهوم مهم دیگر **ورودی** و **خروجی**[۱۱] سیتسم می‌باشند. منظور از ورودی و خروجی الزاما حرکت ماده به داخل یا از داخل فرآیند را شامل نمی‌شود. ورودی و خروجی می‌تواند سیگنال یا فرمان باشد.

۱-۳- لزوم کنترل فرآیند

مهمترین دلایل کنترل فرآیند عبارتند از:

---

[۸] Final control element
[۹] Feedback control
[۱۰] Feedforward control
[۱۱] Input and output

۱- اطمینان از تبعیت متغیر کنترل شونده از مقدار تنظیم،

۲- حذف اغتشاش‌های[۱۲] ورودی به فرآیند، منظور از اغتشاش هر گونه ورودی ناخواسته به فرآیند است. بطور مثال، در مثال سیستم گرمایش آون اغتشاش‌های محتمل عبارتند از: نوسانات در جریان الکتریکی، عدم دقت در اندازه‌گیری، تاخیر در انتقال سیگنال‌های موجود و ...

نتیجه کنترل فرآیند در واحدهای صنعتی عبارت است از: ۱- ایمنی، ۲- حفظ محیط زیست، ۳- عملکرد آرام فرآیند، ۴- کیفیت محصول، ۶- بهینه‌سازی سود و ۷- رهیابی و تعیین مشکلات موجود.

۱-۴- چگونگی اعمال سیستم کنترلی

همانگونه که در مثال رانندگی مشاهده شد، می‌توان الگوریتم کنترلی را توسط یک انسان بر روی فرآیند اعمال کرد. مغز انسان پیچیده‌ترین سیستم کنترلی جهان است. انسان براحتی آموزش دیده و حتی خود آموز است و قادر است که رفتار دینامیکی فرآیند را بدست آورده و حتی تغییرات آن با زمان را نیز در الگوریتم کنترلی وارد کند. اما تکرار فعالیت مکرر اندازه‌گیری برای یک فرد می‌تواند کسل کننده باشد. همچنین ممکن است حجم محاسبات لازم برای تعیین مقدار تغییرات زیاد باشد. از سوی دیگر یک انسان تحت تاثیر بیماری یا احساسات ممکن است اشتباه کند. از لحاظ اقتصادی نیز اگر بتوان یک دستگاه بعنوان کنترلر بکار رود باعث افزایش سود خواهد شد. **اتوماسیون**[۱۳] طبق تعریف قرار دادن دستگاه مناسب بجای هریک از اجزاء سیستم کنترلی می‌باشد. در حال حاضر اکثر سیستم‌های کنترلی توسط دستگاه‌های الکترونیکی (که برای ارتباط اجزاء از ولتاژ یا جریان استفاده می‌شود) اعمال می‌شود. بنا بر این، محاسبات لازم توسط **تکنولوژی عددی یا دیجیتال**[۱۴] انجام می‌گیرد. تکنولوژی قدیمی سیستم‌های کنترلی پنوماتیکی، هیدرولیکی و یا مکانیکی می‌باشد. در سیتم‌های پنوماتیکی و هیدرولیکی از سیالی مانند هوا یا روغن برای ارتباط استفاده می‌شود. در سیستم مکانیکی از مکانیزم‌های مکانیکی بهره گرفته می‌شود.

یکی از ملزومات واجب کنترل فرآیند، ابزار دقیق[۱۵] می‌باشد. به همین منظور یک فصل به ابزار دقیق تخصیص داده شده است. انتخاب مناسب سنسورهای اندازه‌گیری در موفقیت سیستم کنترلی حیاتی است.

---

[۱۲] Disturbances
[۱۳] Automation
[۱۴] Digital technology
[۱۵] Instrumentation

مهمترین قسمت سیستم کنترلی، دستگاه لازم برای انجام محاسبات است که توسط کنترلر[۱۶] انجام می‌شود. کنترلرها به دو دسته کلی **پیوسته** (آنالوگ) و **عددی** (دیجیتال)[۱۷] تقسیم می‌شوند. تا دهه ۱۹۶۰ میلادی، سیستم‌های آنالوگ غالب بوده‌اند. در اینگونه سیستم‌ها، مکانیزمی متناسب با محاسبات مورد نظر ساخته می‌شود. در سیستم‌های عددی، محاسبات توسط کیت‌های الکترونیکی انجام می‌گیرد. از مشخصه‌های سیستم‌های عددی قابلیت انجام محاسبات طولانی و پیچیده است. در دو دهۀ اخیر، با ساخت کامپیوترهای ارزان قیمت، اغلب محاسبات کنترلی توسط کامپیوتر انجام می‌گیرد.

۱-۵- مراجع

1. Marlin T. E., “Process Control, Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance”, McGraw-Hill Co., 1995

[۱۶] Controller
[۱۷] Analog and Digital controllers

فصل ۲

مروری بر تبدیل لاپلاس[۱۸]

۲-۱- مقدمه

روش تبدیل لاپلاس نام یک روش عملگر برای حل معادلات دیفرانسیل است. با این روش معادلهٔ دیفرانسیل به یک معادلهٔ جبری تبدیل شده و معادلهٔ جبری حاصله با استفاده از عملیات جبری قابل حل خواهد بود. دانشجویان قبلا مبحث روش تبدیل لاپلاس را دیده‌اند. اما همانگونه که در ادامه کتاب مشاهده خواهد شد، تبدیل لاپلاس در مهندسی کنترل بسیار مفید می‌باشد. روش تبدیل لاپلاس برای حل مسائل شرط اولیه کاربرد دارد. از سوی دیگر در کنترل فرآیندها $t=0$ لحظه‌ای است که تغییرات بر روی فرآیند اعمال می‌شود. بنا بر این، تمامی مسائل در کنترل فرآیندها از نوع مسئله شرط اولیه است.

۲-۲- مفاهیم اساسی

تابعی مانند $f(t)$ مفروض است که این تابع برای تمام $t \geq 0$ تعریف شده است. حاصل انتگرال زیر که تابعی از s خواهد بود تبدیل لاپلاس $f(t)$ نامیده می‌شود.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (۱-۲)$$

و همچنین $f(t)$ معکوس تبدیل لاپلاس $F(s)$ نامیده می‌شود. در این کتاب از حرف بزرگ انگلیسی به عنوان تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مثال۲-۱- تبدیل لاپلاس $f(t)=1 \quad t>0$ را بدست آورید:

حل-

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad s>a$$

مثال۲-۲- تبدیل لاپلاس $t>0$ $f(t)=e^{-at}$ را بدست آورید.

حل- $$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}(e^{-at})=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=-\frac{1}{s-a}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s+a}s>0$$

چند نکته مهم راجع‌به تبدیل لاپلاس عبارت است از:

۱- تبدیل لاپلاس هیچ اطلاعاتی راجع‌به $f(t)$ در زمان‌های منفی $t<0$ ارائه نمی‌کند. البته در مهندسی کنترل فرض بر این است که در $t<0$ فرآیند در حالت پایدار بوده، لذا تمامی حالات فرآیند معین و معلوم می‌باشند.

۲- تبدیل لاپلاس یک ***تبدیل خطی*** است، به این معنی که:

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\} \qquad (۲-۲)$$

این رابطه براحتی با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس، رابطهٔ (۲-۱)، بدست می‌آید.

مثال۲-۳- تبدیل لاپلاس $t>0$ $f(t)=\sinh at$ را بدست آورید:

حل- $$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}(\sinh at)=\int_0^\infty \sinh at\, e^{-st}dt=\int_0^\infty \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2-a^2}$$

مثال۲-۴- تبدیل لاپلاس $t>0$ $f(t)=t^a$ را بدست آورید:

حل- $$\mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty e^{-st}t^a dt=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^a\frac{dx}{s}=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a dx=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

اگر چه می‌توان با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس و انتگرال‌گیری تبدیل لاپلاس توابع مختلف را بدست آورد، اما ساده‌تر است که از جدول تبدیل لاپلاس توابع مختلف استفاده کرد. تبدیل لاپلاس توابع معمول در کنترل فرآیند در جدول ۲-۱ ارائه شده است.

جدول ۲-۱- تبدیل لاپلاس بعضی از توابع

Laplace transform method [۱۸]

	$f(t)$	$F(s)$
۱	$u(t)$	$1/s$
۲	$t^n \quad n=1,2,\cdots$	$n!/s^{n+1}$
۳	$t^a \quad a$ positive	$\Gamma(a+1)/s^{a+1}$
۴	$\cos kt$	s/s^2+k^2
۵	$\sin kt$	k/s^2+k^2
۶	$\cosh kt$	s/s^2-k^2
۷	$\sinh kt$	k/s^2-k^2
۸	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
۹	$f(t-a) \quad t>a$ $0 \quad t<a$	$e^{-as}F(s)$
۱۱	$-tf(t)$	$F'(s)$
۱۲	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
۱۴	$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)G(s)$
۱۵	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)du$
۱۶	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n>0$
۲۰	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad or \quad \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad n>0$	$\frac{1}{s^n}$
۲۱	$e^{at}\cos kt$	$\frac{1}{(s-a)^n}$

۲-۳- تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال یک تابع

مهمترین خاصیت بعد از خاصیت خطی بودن، تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع است. لازم بذکر است که با استفاده از تبدیل لاپلاس یک تابع از فضای محاسباتی t به فضای محاسباتی s برده می‌شود.

اگر $f(t)$ برای $t \geq 0$ پیوسته باشد و تبدیل لاپلاس داشته باشد آنگاه تبدیل لاپلاس مشتق این تابع عبارت است از:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \qquad (۴-۲)$$

اثبات- با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت که:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left| f(t)e^{-st} \right|_0^\infty - s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

توجه شود که از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده شده است. در حالت کلی برای مشتق nام می‌توان نوشت که:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (۵-۲)$$

با دانستن تبدیل لاپلاس مشتق تابع می‌توان به حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش تبدیل لاپلاس پرداخت. این روش با ذکر یک مثال معرفی می‌شود.

مثال ۲-۵- معادلهٔ زیر را با روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

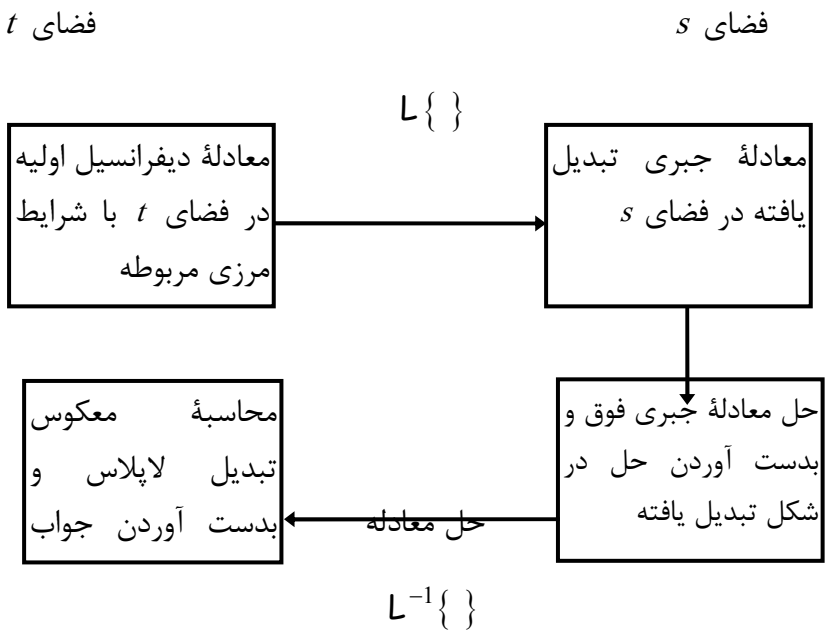
$$y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad y(0) = 3 \quad at \quad y'(0) = 1$$

حل- با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله و فرض $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ بدست می‌آید که:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= sY - y(0) = sY - 3 \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2 - 3s - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad s^2Y + 4sY + 3Y = 3s + 13$$

$$Y = \frac{3s+13}{(s+3)(s+1)} = \frac{-2}{s+3} + \frac{5}{s+1}$$

این عبارت به کمک تجزیه به کسرها با عوامل اول بدست آمده است. با استفاده از جدول معکوس تبدیل لاپلاس این تابع بدست می‌آید که: $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -2e^{-3t} + 5e^{-t}$



خلاصهٔ روش را می‌توان مطابق شکل ۲-۱ نشان داد.

اگر $f(t)$ پیوستگی مقطعی داشته باشد و دارای تبدیل لاپلاس باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس انتگرال آن عبارت است از:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\} \qquad s>0 \tag{۷-۲}$$

اثبات- که به ترتیب زیر قابل اثبات است:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0) \quad \Rightarrow$$

$$L\{g(t)\} = L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\}$$

<u>مثال ۲-۶-</u> معکوس تبدیل لاپلاس عبارت زیر را حساب کنید: $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2\left(s^2+w^2\right)}$

حل-

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+w^2}\right\} = \frac{1}{w}\sin wt$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+w^2}\right\} = \frac{1}{w}\int_0^t \sin w\tau\, d\tau = \frac{1}{w^2}\left(1-\cos wt\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+w^2}\right\}=\frac{1}{w^2}\int_0^t\left(1-\cos w\tau\right)d\tau=\frac{1}{w^2}\left(t-\frac{\sin wt}{w}\right)$$

۲-۴- انتقال روی محور s و محور t

دو خاصیت بسیار مهم انتقال روی محور s و t می‌باشد که ذیلا توضیح داده می‌شوند. اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد آنگاه $F(s-a)$ تبدیل لاپلاس $e^{at}f(t)$ می‌باشد. به بیان دیگر اگر تبدیل لاپلاس به اندازهٔ a در فضای s انتقال داده شود آنگاه تابع در فضای t در e^{at} ضرب می‌شود.

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{L}\left\{e^{at}\ f(t)\right\}=F(s-a) \tag{۲-۸}$$

اثبات- برای اثبات از روش زیر استفاده می‌شود:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)dt$$

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\ f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\ f(t)dt=\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}$$

مثال۲-۷- تبدیل لاپلاس $e^{at}\cos wt$ را بدست آورید.

حل- تبدیل لاپلاس عبارت است از:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos wt\right\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$$

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد آنگاه $e^{-as}F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t-a)$ می‌باشد. به بیان دیگر اگر تابع در فضای t به اندازهٔ a انتقال داده شود آنگاه در فضای s تبدیل لاپلاس در e^{-as} ضرب می‌شود.

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{L}\{f(t-a)\}=e^{-as}F(s) \tag{۲-۹}$$

اثبات- برای اثبات از روش زیر استفاده می‌شود:

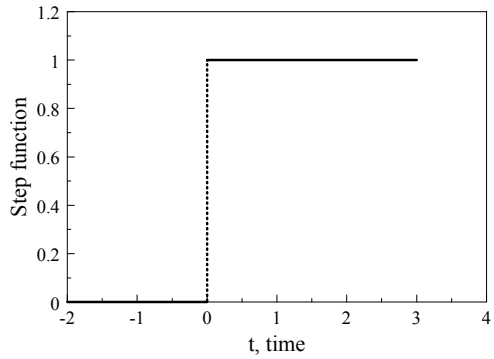
$$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-s(a+\tau)}f(\tau)d\tau$$

$$e^{-as}F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)dt=\mathcal{L}\{f(t-a)\}\,where\,\tau+a=t$$

معمولا برای نشان دادن انتقال در یک تابع از مفهوم ***تابع پلهٔ واحد***[۱۹] استفاده می‌شود. طبق تعریف تابع پلهٔ واحد عبارت است از:

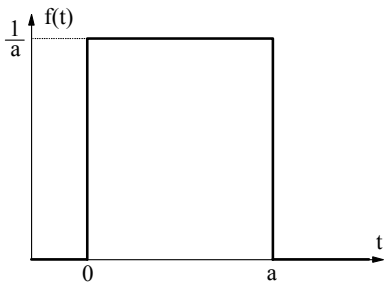
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases} \qquad (۱۰-۲)$$

شکل ۲-۲ تابع پلهٔ واحد را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲- منحنی تابع پلهٔ واحد

مثال ۲-۸- ضابطهٔ تابع نشان داده شده در شکل را بدست آورده و تبدیل لاپلاس آنرا بدست آورید.



شکل ۲-۳- تابع pulse

حل- برای بدست آوردن ضابطهٔ تابع شکل ۲-۳ می‌توان فرض کرد که یک تابع پله به بزرگی $1/a$ در نقطه $t=0$ وارد شده و یک تابع پله به بزرگی $-1/a$ در $t=a$ وارد شده است و از جمع آنها ضابطهٔ تابع $f(t)$ بدست می‌آید که:

$$f(t)=\frac{1}{a}\,u(t)-\frac{1}{a}\,u(t-a)$$

تبدیل لاپلاس این تابع عبارت است از:

$$F(s)=\frac{1}{as}-\frac{e^{-as}}{as}=\frac{\left(1-e^{-as}\right)}{as} \qquad (۱۱-۲)$$

لازم بذکر است که تابع نشان داده شده در شکل با نام ***تابع پالس*** Pulse function شناخته می‌شود.

---

[۱۹] Unit Step Function

در مثال فوق اگر $a \to 0$ میل کند آنگاه مقدار تابع در صفر به بی‌نهایت می‌رود. این تابع جدید را ***تابع ایمپالس***[۲۰] می‌نامند و با $\delta(t)$ نشان می‌دهند.

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0} \frac{u(t) - u(t-a)}{a} \qquad (۱۲-۲)$$

با این تعریف تابع ایمپالس مشتق تابع پله‌ای می‌باشد. در رابطهٔ (۲-۱۲) اگر $a \to 0$ آنگاه تبدیل لاپلاس تابع ایمپالس بدست می‌آید:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{a\to 0} \frac{\left(1 - e^{-as}\right)}{as} = 1 \qquad (۱۳-۲)$$

در مسائل کاربردی، تابع ایمپالس به معنی ایجاد تغییر ناگهانی و بسیار کوتاه مدت در ورودیهای فرآیند است. بطور مثال افزودن مقدار مشخصی از واکنش‌کننده‌ها به رآکتور ایجاد یک تغییر ایمپالس در ورودی است.

۲-۵- کسرهای جزئی[۲۱]

اکثر کاربردها و مثال‌های این بخش به عبارتی بر حسب s می‌رسد که می‌توان آنرا به شکل کسری نوشت:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad (۱۹-۲)$$

که $N(s)$ و $D(s)$ چندجمله‌ایهای بر حسب s هستند و فرض می‌شود که درجهٔ $N(s)$ از درجهٔ $D(s)$ کمتر است و هر دو دارای ضرائب حقیقی هستند و دارای ریشهٔ مشترک نمی‌باشند. بنا بر این جواب $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ خواهد بود. در مثال ۲-۵ حالت ساده‌ای از این روش ذکر شد.

اگر مخرج را بتوان به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد در این صورت می‌توان نوشت که:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}\left(s - r_i\right)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s - r_i} \qquad (۲۰-۲)$$

---

[۲۰] Impulse function

که n درجهٔ چند جمله‌ای $D(s)$ است و r_i ریشه‌های این چندجمله‌ای می‌باشند. به این عمل نوشتن در شکل کسرهای جزئی گفته می‌شود. در جواب عبارت خواهد بود با:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, e^{r_i t} \qquad (۲۱-۲)$$

سریعترین و متداولترین روش برای محاسبه α_i تبدیل به کسرهای جزئی روش ***هویساید***[۲۲] می‌باشد، که ذیلا توضیح داده می‌شود.

مثال ۲-۱۴- معکوس لاپلاس عبارت زیر را بدست آورید.

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+4}$$

حل- ریشه‌های مخرج عبارتند از $r_1 = -1$ و $r_2 = -4$، لذا می‌توان نوشت که:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+4} = \frac{s+5}{(s+1)(s+4)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+4}$$

طبق روش هویساید دو طرف معادلهٔ را در اولین مخرج سمت راست ضرب کرده و s برابر با ریشهٔ این مخرج قرار داده می‌شود، به این ترتیب تمامی جملات سمت راست حذف شده و تنها α_1 باقی می‌ماند:

$$\alpha_1 = \left.\frac{s+5}{s+4}\right|_{s=-1} = \frac{4}{3}$$

به همین ترتیب برای دیگر ضرائب عمل می‌شود:

$$\alpha_2 = \left.\frac{s+5}{s+1}\right|_{s=-4} = -\frac{1}{3}$$

در حالت کلی برای رابطهٔ (۲-۲۰) می‌توان نوشت که:

$$\alpha_i = (s-r_i)\left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=r_i} \qquad (۲۲-۲)$$

ریشه‌های مکرر - اگر در مخرج ریشهٔ r به تعداد b بار تکرار شود، در این صورت $Y(s)$ به شکل زیر بسط داده می‌شود:

---

[۲۱] Partial fractions

[۲۲] Heaviside method

$$Y(s)=\frac{\alpha_1}{s-r}+\frac{\alpha_2}{(s-r)^2}+\cdots\frac{\alpha_b}{(s-r)^b}+\cdots+W(s) \qquad (۲۳-۲)$$

که $W(s)$ باقیماندهٔ $Y(s)$ بعد از تفکیک بخش ریشهٔ مکرر است. در این صورت با ضرب طرفین در $(s-r)^b$ تنها α_b محاسبه می‌شود. در این حالت با گرفتن مشتق‌های متوالی و قرار دادن $s=r$ دیگر ضرائب محاسبه می‌شوند:

$$\alpha_{b-i}=\frac{1}{i!}\frac{d^{(i)}}{ds^{(i)}}\left(\frac{N(s)}{D(s)}(s-r)^b\right)\Bigg|_{s=r} \quad i=0,\cdots,b-1 \qquad (۲۴-۲)$$

ریشه‌های موهومی- اگر ریشه‌های موهومی وجود داشته باشند، مانند $r_{1,2}=a\pm bj$، محاسبات مستلزم عملیات جبری اعداد موهومی می‌باشد که معمولا طولانی می‌باشد. در این مورد بهتر است که $Y(s)$ به شکل زیر بسط داده شود:

$$Y(s)=\frac{\alpha_1 s+\alpha_2}{(s-a)^2+b^2}+W(s) \qquad (۲۵-۲)$$

در این صورت جواب عبارت است از:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{b}e^{at}\left(T_a\cos bt+S_a\sin bt\right)+\mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} \qquad (۲۶-۲)$$

که S_a و T_a بترتیب بخش حقیقی و موهومی عبارت زیر هستند:

$$S_a+jT_a=\left[(s-a)^2+b^2\right]\frac{N(s)}{D(s)}\Bigg|_{s=r_1} \qquad (۲۷-۲)$$

ریشه‌های مکرر موهومی- اگر ریشه‌های موهومی وجود داشته باشند، مانند $r_{1,2}=a\pm bj$ که تکرار هم شده باشند یعنی $(s-r_1)^2$ و $(s-r_2)^2$ حضور داشته باشند آنگاه کسرهای جزئی عبارتند از:

$$Y(s)=\frac{\alpha_1 s+\alpha_2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}+\frac{\alpha_3 s+\alpha_4}{\left[(s-a)^2+b^2\right]}+W(s) \qquad (۲۸-۲)$$

معکوس لاپلاس این عبارت به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}y(t)=\frac{1}{2b^3}e^{at}\Big[&\left(T_a-bS_a^*-bS_a\,t\right)\cos bt\\&+\left(S_a+bT_a^*+bT_a\,t\right)\sin bt\Big]+\mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}\end{aligned} \qquad (۲۹-۲)$$

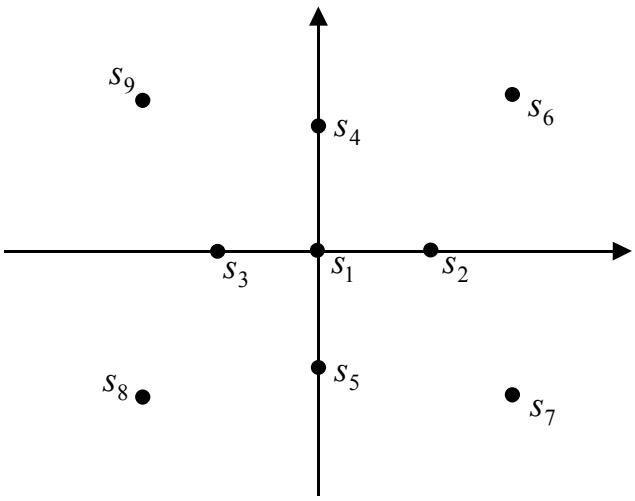
که ضرائب T_a, S_a^*, S_a و T_a^* از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$S_a + j\,T_a = \left[(s-a)^2 + b^2\right]^2 \frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=r_1} \tag{۳۰-۲}$$

$$S_a^* + j\,T_a^* = \frac{d}{ds}\left(\left[(s-a)^2 + b^2\right]^2 \frac{N(s)}{D(s)}\right)\bigg|_{s=r_1} \tag{۳۱-۲}$$

۲-۶- ماهیت کیفی جواب

گاهی اوقات لازم است که ماهیت کیفی جواب از پیش معلوم باشد، چرا که اگر پارامتری در مسئله باشد و بتوان آنرا تغییر داد، می‌توان جواب نهائی را معماری کرد. با توجه به رابطه (۲-۲۰) مقدار ریشه‌ها در ماهیت جواب نقش اساسی دارند. اگر ریشه‌ها حقیقی مثبت باشند، جواب بدون نوسان به سمت بی‌نهایت می‌رود. اگر ریشه‌ها حقیقی منفی باشند، جواب بدون نوسان به سمت صفر می‌رود. اگر ریشه‌ای صفر باشد، جواب دارای یک مقدار ثابت است. اگر ریشه‌ها موهومی باشند، جواب نوسانی خواهد بود. شکل ۲-۴ محل ریشه‌ها در صفحه مختصات موهومی-حقیقی و ماهیت جواب متناظر را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴- تاثیر محل ریشه‌ها در کیفیت جواب

۲-۷- قضیه‌های مقدار نهائی و مقدار اولیه

اگر تابع $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{t\to\infty}\left[f(t)\right]=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right] \qquad (۳۲-۲)$$

بنا بر این در صورت نیاز به مقدار $f(t)$ در زمان‌های بزرگ می‌توان مقدار $sF(s)$ در صفر را محاسبه کرد. این قضیه مقدار نهائی[۲۳] نامیده می‌شود. برای اثبات از رابطه زیر کمک گرفته می‌شود:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

حد این رابطه در $s\to 0$ عبارت است از:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

ترتیب انتگرال‌گیری و حدگیری در سمت چپ را تغییر داده و عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{t\to 0} f(t) - f(0) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

که نتیجه همان رابطه (۲-۳۲) می‌باشد.

قضیه مقدار اولیه به شکل زیر می‌باشد:

$$\lim_{t\to 0}\left[f(t)\right]=\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)\right] \qquad (۳۳-۲)$$

اثبات این قضیه مشابه قضیه قبل می‌باشد.

۲-۸- خلاصه

در این فصل روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل بررسی شد. این روش با خواص منحصر بفرد خود باعث می‌شود که یک معادله دیفرانسیل به یک معادلهٔ جبری تبدیل شود. این روش تنها برای معادلات دیفرانسیل خطی و مسائل شرط اولیه قابل استفاده است. البته این محدودیت از جذابیت، سادگی و کوتاهی مسیر حل این روش نمی‌کاهد. مثال‌های ۲-۱۰ و ۲-۱۲ کاربرد این روش در مسائل

---

[۲۳] Final value theorem

مهندسی را نشان می‌دهد. لذا یک مهندس می‌بایست حداقل با این روش آشنا بوده و بتواند در تجزیه و تحلیل مسائل از آن استفاده کند.

۲-۹- مراجع

1. W. L. Luyben, “Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineering”, McGraw Hill Co., 1993

5. E. Kreyszig, “Advanced Engineering Mathemathics”, Wiley Inc., 4th edition, 1979

7. M. R. Spiegel, “Mathematical Handbook of Formulas and Tables”, Schum’s Outline Series, McGraw Hill Co., 1968

10. D. R. Coughanowr, “Process Systems Analysis and Control”, McGraw Hill Co., 1993

فصل سوم

مدل‌سازی دینامیکی و تابع انتقال فرآیندها

۳-۱- مقدمه

قبل از بررسی سیستم‌های کنترلی، باید دانست که فرآیندها بطور مجزا در مقابل تغییرات ورودی یا ایجاد اغتشاش در آنها چگونه رفتار می‌کنند. پاسخ گذرای سیستم عبارت است از تغییرات خروجی فرآیند در اثر اعمال تغییرات در ورودی یا ایجاد اغتشاش در فرآیند. بدین منظور باید یک مدل ریاضی استفاده گردد. مبانی مدل‌سازی فرآیندها در درس‌های قبلی نظیر کاربرد ریاضیات، پدیده‌های انتقال کامل بحث شده است، بنا بر این برخی از جزئیات در اینجا ذکر نخواهد شد.

۳-۲- یک مثال مقدماتی

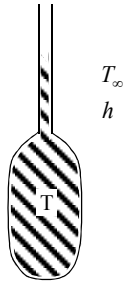
یک دماسنج جیوه‌ای در نظر بگیرید. این دماسنج در ابتداء در محیطی به دمای $T_{\infty s}$ قرار داشته و دمای $T_s = T_{\infty s}$ (زیرنویس s بیانگر حالت پایدار است) را نشان می‌دهد. در لحظهٔ $t = 0$، این دماسنج در محیطی بدمای $T_\infty = T_{\infty s} + \Delta T$ قرار می‌گیرد. در نظر است که دمایی که دماسنج نشان می‌دهد، بر حسب زمان بدست آید. شکل ۳-۱ این دماسنج را نشان می‌دهد.

می‌بایست موازنهٔ انرژی گذرا برای دماسنج نوشته شود. برای ساده سازی از فرضیات زیر استفاده می‌شود:

۱- مقدار جیوه در حباب بسیار بیشتر از مقدار جیوه در لوله موئینه است. لذا فرض می‌شود که جرم جیوه درون حباب ثابت است.

۲- شیشهٔ حباب بسیار نازک بوده و مقاومت حرارتی ناچیزی دارد. در نتیجه انتقال حرارت جابجائی مستقیما بین جیوه و محیط انجام می‌گیرد.

۳- تمامی نقاط جیوه دارای یک دما می‌باشد.



شکل ۳-۱- دماسنج جیوه‌ای

موازنهٔ انرژی برای جیوه عبارت است از:

$$mC\frac{dT}{dt} = hA\left(T_\infty - T\right) \qquad (۱-۳)$$

$$T = T_s \qquad @ \qquad t = 0$$

که A سطح حباب جیوه بوده و ثابت فرض شده، C ظرفیت حرارتی جیوه، h ضریب انتقال حرارت جابجائی بین محیط و جیوه بوده و m جرم جیوه درون حباب می‌باشد. حل معادله دیفرانسیل (۳-۱) توزیع دمای گذرا در دماسنج را بدست می‌دهد.

این معادله را می‌توان با استفاده از روش‌های که در معادلات دیفرانسیل بررسی شده، حل کرد. بدین منظور مقدار T_∞ در معادله (۳-۱) قرار داده می‌شود:

$$\frac{mC}{hA}\frac{dT}{T-\left(T_{\infty s}+\Delta T\right)} = -dt$$

پارامتر $\tau = \dfrac{mC}{hA}$ دارای بعد زمان بوده و به آن ***ثابت زمانی***[۲۴] گفته می‌شود. راجع به معنی فیزیکی ثابت زمانی بعدا بحث خواهد شد. ادامه حل عبارت است از:

$$\frac{dT}{T-\left(T_{\infty s}+\Delta T\right)} = -\frac{1}{\tau}dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left[T-\left(T_{\infty s}+\Delta T\right)\right] = -{}^{t}\!/_{\tau} + C_1$$

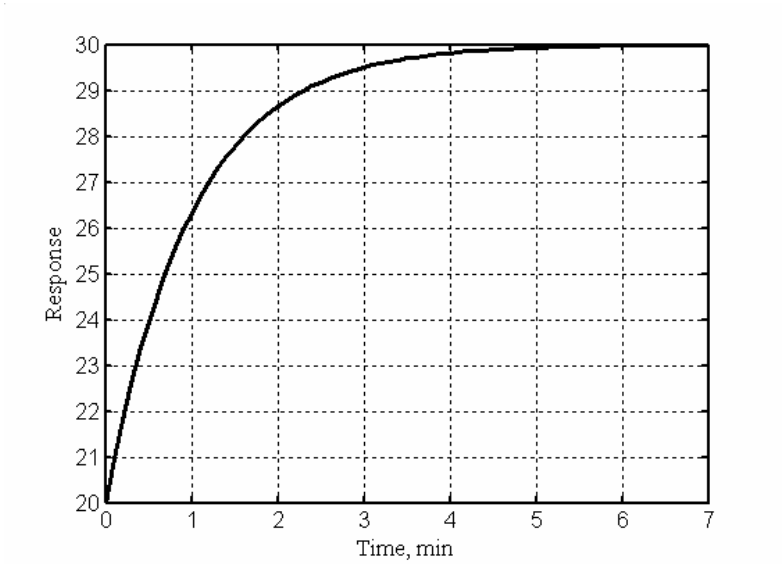
مقدار ثابت C_1 با استفاده از شرط مرزی بدست می‌آید. جواب نهائی عبارت است از:

---

[۲۴] Time Constant

$$T = T_s + \Delta T\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad (۲-۳)$$

شکل ۳-۲ رسم دمای دماسنج بر حسب زمان را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲- دمای دماسنج بر اثر تغییر ناگهانی دمای محیط

اگرچه این روش صحیح است، اما در مهندسی کنترل همین مسئله از دیدگاه خاصی بررسی و حل می‌شود. بدین ترتیب که:

۱- موازنه گذرای انرژی نوشته می‌شود، که همان رابطه (۳-۱) بدست می‌آید.

۲- موازنهٔ انرژی در حالت پایدار نیز نوشته می‌شود:

$$0 = hA\left(T_{\infty s} - T_s\right) \qquad (۳-۳)$$

۳- تفاضل این دو معادله عبارت است از:

$$\tau \frac{dT}{dt} = \left[\left(T_\infty - T_{\infty s}\right) - \left(T - T_s\right)\right]$$

۴- ***متغیرهای انحرافی***[۲۵] به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$T = T - T_s \text{ و } T_\infty = T_\infty - T_{\infty s} \qquad (۴-۳)$$

این متغیرها میزان انحراف از حالت پایدار اولیه را نشان می‌دهند. در مهندسی کنترل میزان انحراف بیشتر از خود مقادیر مورد توجه می‌باشند. بنا بر این می‌توان نوشت که:

$$\tau \frac{dT'}{dt} = T'_\infty - T' \qquad (۵-۳)$$

۵- تبدیل لاپلاس رابطهٔ (۳-۵) برابر است با:

$$\tau\left[sT'(s) - T'(t=0)\right] = T'_\infty(s) - T'(s) \qquad (۶-۳)$$

با توجه به تعریف متغیرهای انحرافی $T'(t=0)=0$ ، این یکی دیگر از مزایای متغیرهای انحرافی است. بنا بر این:

$$\frac{T'(s)}{T'_\infty(s)} = \frac{1}{\tau s+1} \qquad (۷-۳)$$

این رابطه ***تابع انتقال***[۲۶] دماسنج نامیده می‌شود. برای بدست آوردن دمای دماسنج در اثر تغییر ناگهانی در دمای محیط به ترتیب زیر عمل می‌شود. تابع دمای محیط، با استفاده از تعریف تابع پله‌ای، عبارت است از:

$$T_\infty = \begin{cases} T_{\infty s} & t<0 \\ T_{\infty s} + \Delta T & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad T'_\infty = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \Delta T & t \geq 0 \end{cases} = \Delta T \cdot u(t)$$

تبدیل لاپلاس این تابع $T'_\infty(s) = \Delta T / s$ بوده که در رابطهٔ (۳-۷) جایگذاری می‌شود:

$$T'(s) = \frac{\Delta T}{s}\frac{1}{\tau s+1}$$

معکوس لاپلاس این رابطه با استفاده از روش هویساید عبارت است از:

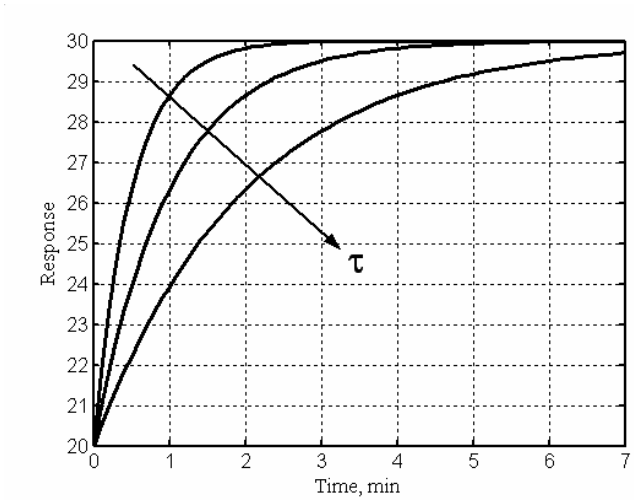
$$T'(s) = \frac{\Delta T}{s} + \frac{\Delta T}{s+1/\tau} \quad \Rightarrow \quad T'(t) = \Delta T\left[1-e^{-t/\tau}\right] \quad \Rightarrow \quad T(t) = T_s + \Delta T\left[1-e^{-t/\tau}\right] \qquad (۲-۳)$$

این همان رابطهٔ (۳-۲) می‌باشد. بنا بر این جواب هر دو روش یکسان است، اما دیدگاه دوم روش معمول در کنترل فرآیندها می‌باشد. یکی از مزایای روش دوم آن است که اگر تابعی برای تغییرات دمای محیط وجود داشته باشد، می‌توان از آن تبدیل لاپلاس گرفته و در تابع انتقال قرار داده و پس از معکوس لاپلاس گیری جواب یا **پاسخ سیستم**[۲۷] بدست می‌آید.

---

[۲۵] Deviation variables
[۲۶] Transfer function
[۲۷] System response

ثابت زمانی زمانی معیاری از سرعت پاسخگوئی فرآیند در مقابل تغییر ورودی است. هر چه ثابت زمانی کمتر باشد، آنگاه سرعت پاخدهی کمتر خواهد بود. اصطلاحا گفته می‌شود که دینامیک فرآیند سریع می‌باشد. همچنین مدت زمانی که فرآیند دارای تغییرات است تا به حالت پایدار جدید (***مقدار ماندگار***) برسد را رفتار دینامیکی فرآیند می‌گویند. شکل ۳-۳ نحوه پاسخدهی چند دماسنج با ثابت زمانی مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۳- تغییر رفتار در اثر تغییر ثابت زمانی

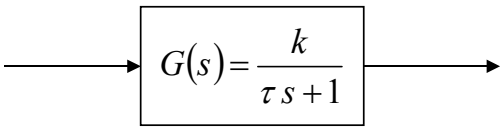
۳-۳- خواص تابع انتقال

همانگونه که در رابطه (۳-۷) مشخص است، تابع انتقال نسبت متغیر خروجی به متغیر ورودی می‌باشد. در این مثال ورودی همان دمای محیط و خروجی همان دمای دماسنج است. تابع انتقال با $G(s)$ نشان داده می‌شود. تابع انتقال حاوی مشخصه‌های دینامیکی سیستم است. ثابت زمانی معیاری از سرعت سیستم در پاسخ دهی به تغییرات ورودی است.

دماسنج یک سیستم درجهٔ اول می‌باشد، زیرا دینامیک آن با یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول بیان می‌شود. نمایش معمول در مهندسی کنترل، ***دیاگرام جعبه‌ای***[۲۸] است. بدین ترتیب که هر سیستم با یک جعبه نشان داده شده و ورودی و خروجیهای آن با پیکان نشان داده می‌شود. شکل ۳-۴ دیاگرام جعبه‌ای دماسنج را نشان می‌دهد.

---

[۲۸] Block diagram



شکل ۳-۴- دیاگرام جعبه‌ای دماسنج

شکل عمومی سیستم مرتبهٔ اول عبارت است از:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{k}{\tau s+1} \qquad (۳-۸)$$

که k بهره سیستم و τ ثابت زمانی آن می‌باشد.

۳-۴- بررسی دینامیک فرآیند

در مهندسی کنترل یکی از اقدامات اولیه بررسی دینامیک فرآیند است. منظور از بررسی دینامیکی عبارت است از بدست آوردن تابع انتقال فرآیند و همچنین محاسبه پاسخ سیستم نسبت به ورودیهای مختلف. معمولترین ورودیهای که در دینامیک فرآیندها بررسی می‌شود عبارتند از: ۱- ورودی پله‌ای، ۲- ورودی ایمپالس، و ۳- ورودی سیسنوسی.

مثال ۳-۱- پاسخ ایمپالس سیستم مرتبهٔ اول

پاسخ ایمپالس سیستم مرتبهٔ اول در مقابل ورودی ایمپالس به بزرگی A را بدست آورید.

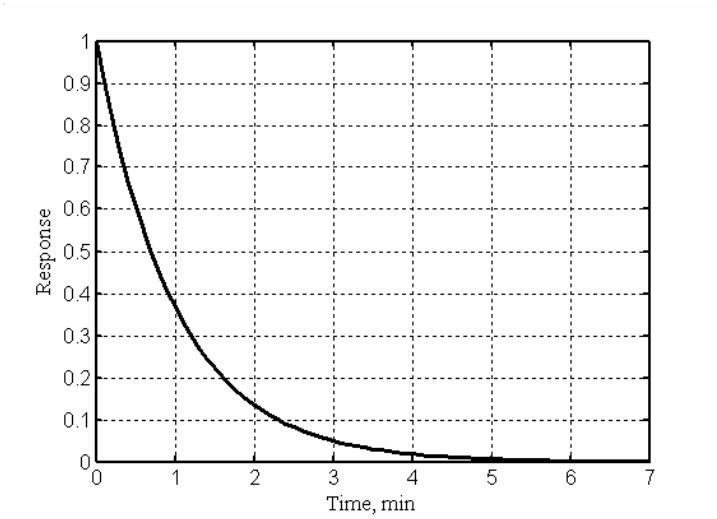
حل - ورودی به بزرگی A عبارت است از:

$$X(t) = A\delta(t) \quad \Rightarrow \quad X(s) = A$$

این عبارت در تابع انتقال قرار داده می‌شود:

$$Y(s) = A\frac{k}{\tau s+1} \quad \Rightarrow \quad Y(t) = \frac{Ak}{\tau} e^{-t/\tau} \tag{۹-۳}$$

شکل ۳-۵ این پاسخ را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۵- پاسخ ایمپالس سیستم درجهٔ اول

مثال ۳-۲- پاسخ سینوسی سیستم درجهٔ اول

پاسخ سینوسی سیستم درجهٔ اول در مقابل ورودی $X(t) = A\sin\omega t$ را بدست آورید. تذکر- A دامنه و ω فرکانس زاویه‌ای نامیده می‌شود. واحد فرکانس زاویه‌ای $rad/time$ است.

حل- تبدیل لاپلاس ورودی $X(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$ بوده که در تابع انتقال قرار داده می‌شود:

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}\frac{k}{\tau s+1} = \frac{C_1 s + C_2}{s^2+\omega^2} + \frac{C_3}{s+1/\tau}$$

سمت راست با استفاده از روش کسرهای جزئی نوشته شده است. پس از انجام محاسبات بدست می‌آید که:

$$Y(t) = \frac{A\omega\tau}{\tau^2\omega^2+1}e^{-t/\tau} + \frac{A}{\tau^2\omega^2+1}\sin\omega t - \frac{A\omega\tau}{\tau^2\omega^2+1}\cos\omega t \tag{۱۰-۳}$$

با استفاده از رابطهٔ $A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(\theta + Arc\tan\frac{A}{B}\right)$ می‌توان نوشت که:

$$Y(t) = \frac{A\omega\tau}{\tau^2\omega^2+1}e^{-t/\tau} + \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\sin\left(\omega t - Arc\tan\omega\tau\right) \qquad (۱۱-۳)$$

این جواب مشتمل بر دو قسمت است، جمله اول که با گذشت زمان به سمت صفر می‌رود، بنا بر این میرا است. جمله دوم همواره باقی می ماند بنا بر این بخش ماندگار جواب است:

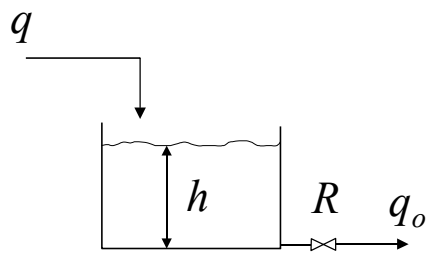
$$Y(t)\big|_{steady} = \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\sin\left(\omega t - Arc\tan\omega\tau\right) \qquad (۱۲-۳)$$

اگر این جواب پایدار جدید را با ورودی مقایسه کنیم نتیجه می‌شود: اولا پاسخ ورودی سینوسی نیز سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای می‌باشد، ثانیا نسبت دامنه خروجی به ورودی $A/\sqrt{\tau^2\omega^2+1}$ بوده که همواره کمتر از یک است، ثالثا خروجی همواره نسبت به ورودی دارای تاخیر فاز $Arc\tan\omega\tau$ می‌باشد.

۳-۵- سیستم‌های درجهٔ اول در حالت سری

دماسنج تنها فرآیند مرتبهٔ اول نبوده و می‌توان فرآیندهای دیگری با دینامیک مرتبه اول پیدا کرد. گاهی سیستم‌های مرتبه اول در حالت سری هستند. در این بخش ابتداء مثال دیگری از سیستم مرتبهٔ اول ارائه شده و سپس در حالت سری بررسی می‌شوند.

یک سیستم سطح مایع در تانک مطابق شکل ۳-۶ در نظر بگیرید. میزان دبی حجمی به تانک q بوده و حجم مایع داخل تانک V می باشد. دبی خروجی از تانک $q_o = h/R$ بوده که از میان یک شیر با رفتار خطی عبور می‌کند. R مقاومت شیر می‌باشد. منظور از شیر با رفتار خطی آن است که دبی گذرنده از آن متناسب با ارتفاع مایع داخل تانک است.



شکل ۳-۶- تانک ارتفاع

در نظر است که تابع انتقال ارتفاع مایع داخل تانک نسبت به دبی ورودی به تانک بدست آید. بدین منظور موازنه جرم برای حجم مایع داخل تانک نوشته می‌شود:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho q - \rho_o q_o \qquad (۱۳-۳)$$

برای سادگی فرض می‌شود که دانسیته مایع ثابت بوده و همچنین سطح مقطع تانک ثابت بوده و لذا $V = Ah$، در نتیجه رابطهٔ فوق تبدیل می‌شود به:

$$A\frac{dh}{dt} = q - \frac{h}{R} \qquad (۱۴-۳)$$

طبق دستور العمل ذکر شده در بخش ۳-۲، این معادله از حالت پایدار کسر می‌شود:

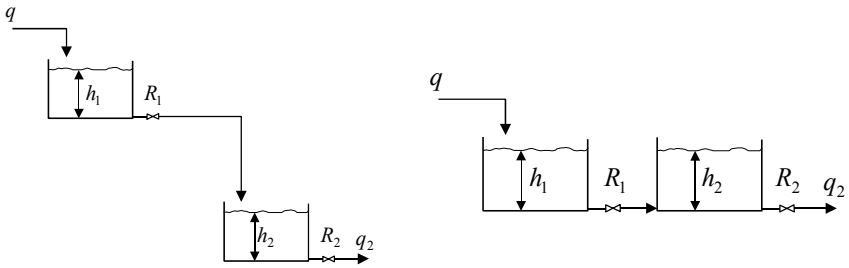
$$\begin{cases} A\dfrac{dh}{dt} = q - \dfrac{h}{R} \\ 0 = q_s - \dfrac{h_s}{R} \end{cases} - \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh}{dt} = (q - q_s) - \frac{h - h_s}{R}$$

با تعریف متغیرهای انحرافی $H = h - h_s, \quad Q = q - q_s$ و تبدیل لاپلاس گیری از طرفین می‌توان نوشت که:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{ARs + 1} \qquad (۱۵-۳)$$

این رابطه، تابع ارتفاع مایع داخل تانک نسبت به دبی ورودی است. در اینحالت ثابت زمانی $\tau = AR$ بوده و بهره سیستم R است. در اینمورد بهره نقش تبدیل واحد از ورودی (دبی) به خروجی (ارتفاع) را نیز دارد.

اکنون دو تانک ارتفاع مایع بطور سری فرض می‌شوند. البته این دو تانک را به دو صورت مختلف می‌توان بطور سری قرار داد. شکل ۳-۷ این دو حالت را نشان می‌دهد. در حالت الف دو تانک بر یکدیگر اثر متقابل نداشته و خروجی از تانک اول تاثیری از ارتفاع مایع در تانک دوم نمی‌پذیرد. در حالیکه، در حالت ب دو تانک بر یکدیگر اثر متقابل داشته و خروجی از تانک اول از ارتفاع مایع در تانک دوم تاثیر می‌پذیرد. در نتیجه انتظار می‌رود که این دو حالت رفتار دینامیکی متفاوتی داشته باشند.



شکل ۳-۷- دو تانک ارتفاع در حالت سری

۳-۵-۱- دو تانک ارتفاع در حالت سری و بدون اثر متقابل

هدف بدست آوردن تابع انتقال ارتفاع در تانک دوم نسبت به دبی ورودی به تانک اول $H_2(s)/Q(s)$ می‌باشد. بدین منظور رابطهٔ (۳-۱۵) برای هریک از تانک‌ها نوشته می‌شود:

$$\frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{R_1}{\tau_1 s+1} \qquad (۳-۱۶)$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{\tau_2 s+1} \qquad (۳-۱۷)$$

متغیرهای انحرافی در اینمورد عبارتند از:

$$Q = q - q_s,\ Q_1 = q_1 - q_{1s},\ Q_2 = q_2 - q_{2s},\ H_1 = h_1 - h_{1s},\ H_2 = h_2 - h_{2s} \qquad (۳-۱۸)$$

توجه شود که رابطهٔ (۳-۱۵) قابل نوشتن است زیرا دبی خروجی از تانک اول تحت تاثیر ارتفاع مایع در تانک دوم نیست. رابطهٔ رفتار خطی شیر در حالت پایدار نیز صحیح است و لذا:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{h_1}{R_1} \\ q_{1s} = \dfrac{h_{s1}}{R_1} \end{cases} - \quad \Rightarrow \quad q_1 - q_{1s} = \frac{h_1 - h_{1s}}{R_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{H_1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \qquad (۳-۱۹)$$

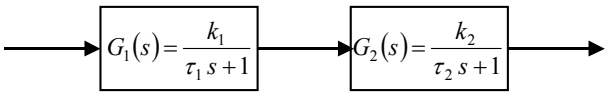
اکنون این رابطه در معادله (۳-۱۶) قرار داده شدهأ حاصل عبارت است از:

$$\frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\tau_1 s+1} \qquad (۳-۲۰)$$

(توجه شود که ورودی و خروجی دبی بوده و بهره مجددا یک شده است). حاصل ضرب رابطه (۳-۱۷) و (۳-۲۰) تابع انتقال مطلوب را ارائه می‌کند:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \qquad (۲۱-۳)$$

قابل ذکر است که رابطهٔ (۳-۲۱) نشان می‌دهد که ارتباط h_2 با q توسط یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم بیان می‌شود، لذا این سیستم مثالی از سیستم درجهٔ دوم می‌باشد. دیاگرام جعبه‌ای این سیستم مطابق شکل ۳-۸ است. در نتیجه تابع انتقال کلی سیستم‌های سری بدون اثر متقابل برابر با حاصلضرب تابع انتقال هر یک از آنها است.



شکل ۳-۸- دیاگرام جعبه‌ای دو تانک ارتفاع در حالت سری بدون اثر متقابل

۳-۵-۲- دو تانک ارتفاع در حالت سری و با اثر متقابل

در حالتی که دو تانک بصورت با اثر متقابل سری می‌باشند، دبی خروجی از تانک اول تحت تاثیر اختلاف ارتفاع دو تانک می‌باشد. با فرض اینکه رفتار شیر خطی است، می‌توان نوشت که:

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad (۲۲-۳)$$

درنتیجه، دینامیک کامل این سیستم با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dh_1}{dt} = q - q_1 \\ A_2 \dfrac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \\ q_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1} \\ q_2 = \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases} \tag{۲۳-۳}$$

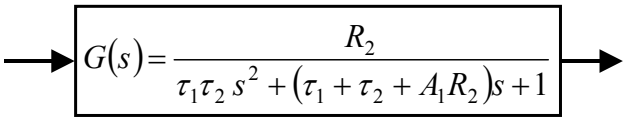
اگر این معادلات از معادلات در حالت پایدار کسر شده و پس از تبدیل لاپلاس بدست می‌آید که:

$$\begin{cases} A_1 sH_1(s) = Q(s) - Q_1(s) \\ A_2 sH_2(s) = Q_1(s) - Q_2(s) \\ R_1 Q_1(s) = H_1(s) - H_2(s) \\ R_2 Q_2(s) = H_2(s) \end{cases} \tag{۲۴-۳}$$

با حذف سه پارامتر Q_1، Q_2 و H_1 بین این معادلات بدست می‌آید که:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + \left(\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2\right)s + 1} \tag{۲۵-۳}$$

شکل ۳-۹ نمودار دیاگرام جعبه‌ای این سیستم را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۹- دیاگرام جعبه‌ای دو تانک ارتفاع و با اثر متقابل

مثال ۳-۳- پاسخ پله‌ای دو تانک ارتفاع در حالت سری

دو تانک کاملا مشابه بطور سری بسته می‌شوند. پاسخ پله‌ای واحد این دو تانک در دو حالت بدون اثر متقابل و با اثر متقابل را بدست آورده و با یکدیگر مقایسه کنید.

حل- در موردی که دو تانک کاملا مشابه هستند می‌توان نوشت که: $R_1 = R_2 = R$ ، $A_1 = A_2 = A$ و $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. ورودی $Q(s) = 1/s$ است. در حالت بدون اثر متقابل می‌توان نوشت که:

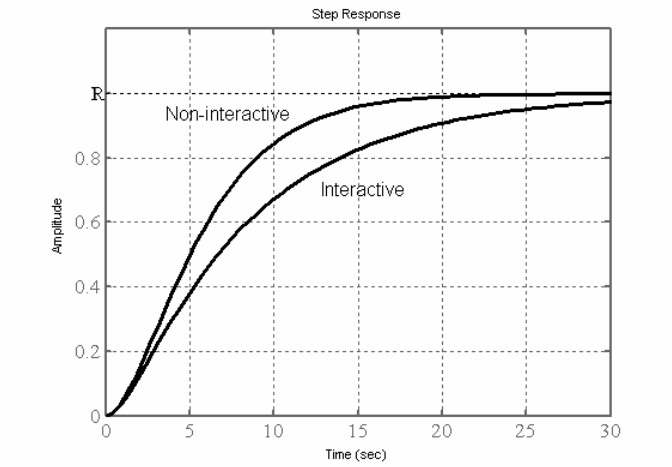
$$H_2(s) = \frac{1}{s}\frac{R}{(\tau s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad H_2(t) = R\left[1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}\right]$$

در حالت با اثر متقابل می‌توان نوشته که:

$$H_2(s) = \frac{1}{s}\frac{R}{\left(\tau^2 s^2 + 3\tau s+1\right)^2} = \frac{1}{s}\frac{R}{(0.38\tau s+1)(2.62\tau s+1)} \quad \Rightarrow$$

$$H_2(t) = R\left[1 + 0.17e^{-t/0.38\tau} - 1.17e^{-t/2.62\tau}\right]$$

شکل ۳-۱۰ رسم این دو پاسخ را نشان می‌دهد. همانگونه که انتظار می‌رفت، پاسخ سیستم با اثر متقابل کندتر است. دلیل این موضوع آن است که ارتفاع مایع در تانک دوم مانعی بر سر جریان بوده که در حالت بدون اثر متقابل وجود ندارد.



شکل ۳-۱۰- رفتار دو تانک ارتفاع

۳-۶- سیستم درجهٔ دوم

سیستم درجهٔ دوم فرآیندی است که دینامیک آن توسط معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم قابل بیان است. دو سیستم درجهٔ اول سری مثالی از این نوع سیستم‌ها می‌باشد. شکل کلی سیتسم درجهٔ دوم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \qquad (۲۶-۳)$$

که k بهره سیستم، τ ثابت زمانی و ζ (این پارامتر **زتا** خوانده می‌شود) ضریب میرائی نامیده می‌شود.

مثال ۳-۴- سیستم درجهٔ دوم

برای تابع انتقال فرآیند دو تانک ارتفاع در حالت سری با اثر متقابل، پارامترهای تابع انتقال سیستم درجهٔ دوم را بدست آورید.

حل –

تابع انتقال در این حالت رابطهٔ (۳-۲۵) می‌باشد:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1\tau_2 s^2 + \left(\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2\right)s + 1}$$

در مقایسه با رابطهٔ (۳-۲۶) می‌توان نوشت که:

$$k = R_2, \quad \tau = \sqrt{\tau_1\tau_2}, \quad \zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

مثال ۳-۵- پاسخ پله‌ای سیستم درجهٔ دوم

پاسخ پله‌ای واحد سیستم مرتبهٔ دوم را بدست آورید.

حل- در رابطهٔ (۳-۲۶) $X(s) = 1/s$ قرار داده می‌شود:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = \frac{1}{\tau^2}\frac{1}{s}\frac{k}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

که $s_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$ می‌باشد. از آنجا که ریشه‌ها می‌توانند موهومی باشند، جواب می‌تواند ماهیت نوسانی داشته باشد. اگر $\zeta < 1$ باشد، جواب عبارت است از:

$$Y(t)=k\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta t/\tau}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau}+Arc\tan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right] \qquad (۲۷-۳)$$

پارامتر ζ در توان قرار دارد و هر جه بزرگتر باشد، جواب سریعتر به مقدار پایدار جدید خواهد رسید. به همین علت، آنرا ضریب میرائی می‌نامند.

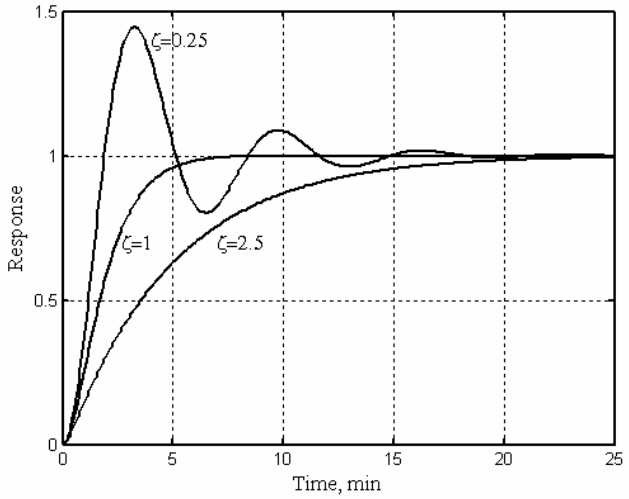
اگر $\zeta=1$ باشد، جواب عبارت است از:

$$Y(t)=k\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right] \qquad (۲۸-۳)$$

اگر $\zeta>1$ باشد، جواب خواهد بود:

$$Y(t)=k\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta t/\tau}\left(\cosh\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau}+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sinh\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau}\right)\right] \qquad (۲۹-۳)$$

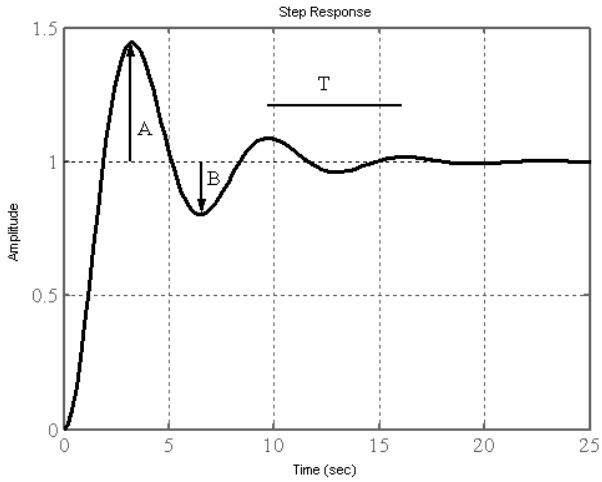
شکل ۳-۱۱ این سه جواب را نشان می‌دهد. همانگونه که در شکل واضح است در دو حالت میرای بحرانی و فوق‌میرا، جواب به پاسخ پله‌ای سیستم درجهٔ اول بسیار نزدیک بوده و غیر نوسانی می‌باشد. اما حالت تحت میرا جدید بوده و مکررا در سیستم‌های کنترلی چنین رفتاری مشاهده می‌شود. مشخصه‌های این رفتار بطور جزی بحث می‌گردند.



شکل ۳-۱۱- پاسخ پله‌ای سیستم درجهٔ دوم

۳-۷- مشخصه‌های پاسخ پله‌ای تحت میرای سیستم مرتبهٔ دوم

شکل ۳-۱۲ یک نمونه از پاسخ پله‌ای سیستم مرتبهٔ دوم تحت میرا را نشان می‌دهد. بر روی این شکل مشخصه‌های مهم نشان داده شده‌اند.



شکل ۳-۱۲- پاسخ پله‌ای تحت میرای سیستم درجه دوم

حداکثر انحراف[۲۹] معیاری از بیشترین انحراف از مقدار ماندگار است:

$$overshoot = \frac{A}{k} = \exp\left(\frac{-\pi\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\right) \qquad (۳-۳۰)$$

ضریب میرائی[۳۰] نسبت دو قله متوالی می‌باشد:

$$Decay\ ratio = \frac{C}{A} = \exp\left(\frac{-2\pi\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\right) \qquad (۳-۳۱)$$

زمان ***خیزش زمانی***[۳۱] است که جواب برای اولین بار به مقدار پایدار جدید می‌رسد:

$$Risetime = \frac{\left[\pi - Arc\tan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right]\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (۳-۳۲)$$

---

[۲۹] Overshoot
[۳۰] Decay ratio
[۳۱] Rise time

زمان پاسخ[۳۲] برابر زمانی است که جواب به فاصله پنج درصدی از مقدار پایدار جدید می‌رسد:

$$\mathrm{Re}\,sponsetime = \frac{3\tau}{\zeta} \qquad (۳۳-۳)$$

۳-۸- سیستم غیر خطی

فرآیندهای که تاکنون بررسی شدند، با توجه به فرضیات اعمال شده به معادلات دیفرانسیل خطی منجر شدند. اما در مورد فرآیندهای واقعی، عموما معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست می‌آیند. به چنین فرآیندهای ***سیستم‌های غیرخطی***[۳۳] گفته می‌شود. اگرچه روش کنترل غیرخطی نیز وجود دارد، اما اولا وسعت آن محدود بوده و ثانیا پیچیدگی ویژه‌ای دارد. در چنین مواردی یکی از روشها تقریب خطی فرآیند می‌باشد. بدین ترتیب که جملات غیر خطی در معادله با استفاده از دو جملهٔ اول ***بسط تیلور***[۳۴] خطی می‌شود. بسط تیلور عبارت است از:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!\,dx^2}(x - x_0)^2 + \cdots \qquad (۳۴-۳)$$

بطور مثال فرآیند تانک ارتفاع را مجددا در نظر بگیرید. دبی خروجی از تانک متناسب با ارتفاع مایع داخل تانک نیست. در واقع شیر رفتار خطی ندارد. رابطهٔ معمول در مکانیک سیالات عبارت است از:

$$q_o = C\sqrt{h} \qquad (۳۵-۳)$$

که یک عبارت خیرخطی می‌باشد. بنا بر این موازنهٔ جرم عبارت است از:

$$A\frac{dh}{dt} = q - C\sqrt{h} \qquad (۳۶-۳)$$

این معادله غیرخطی بوده و نمی‌توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده کرد. به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت که:

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_s} + \frac{2}{\sqrt{h_s}}(h - h_s) \qquad (۳۷-۳)$$

که h_s ارتفاع در حالت پایدار است. با قرار دادن در رابطهٔ بالا می‌توان نوشت که:

$$A\frac{dh}{dt} = q - C\left[\sqrt{h_s} + \frac{2}{\sqrt{h_s}}(h - h_s)\right] \qquad (۳۸-۳)$$

---

[۳۲] Response time
[۳۳] Non linear systems
[۳۴] Taylor expansion series

اکنون این معادله خطی بوده و می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. البته ابتداء طبق معمول معادلهٔ حالت پایدار از آن کسر می‌شود:

$$\begin{cases} A\dfrac{dh}{dt} = q - C\left[\sqrt{h_s} + \dfrac{2}{\sqrt{h_s}}(h - h_s)\right] \\ 0 = q_s - C\sqrt{h_s} \end{cases} - \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh}{dt} = (q - q_s) - \frac{2C}{\sqrt{h_s}}(h - h_s) \qquad (۳۹-۳)$$

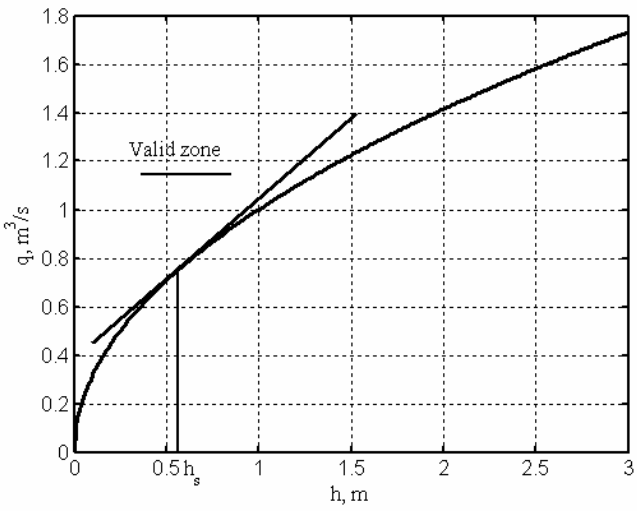
با استفاده از متغیرهای انحرافی می‌توان نوشت که:

$$A\frac{dH}{dt} = Q - \frac{2C}{\sqrt{h_s}}H = Q - \frac{1}{R}H \qquad where \qquad R = \frac{\sqrt{h_s}}{2C} \qquad (۴۰-۳)$$

تبدیل لاپلاس‌گیری از این رابطه و نوآرائی آن می‌دهد که:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{ARs + 1} \qquad (۴۱-۳)$$

اگرچه این تابع انتقال مشابه (۳-۱۵) می‌باشد، اما دقت شود که بهره و ثابت زمانی تابعی از h_s یا وضعیت پایدار هستند. بنابراین، خطی سازی وابسته به نقطهٔ خطی سازی می‌باشد. شکل زیر مفهوم هندسی خطی‌سازی را نشان می‌دهد. شکل ۳-۱۳ نمایش ترسیمی مفهوم خطی‌سازی می‌باشد.



شکل ۳-۱۳- مفهوم ترسیمی خطی‌سازی فرآیند

۳-۹- زمان مرده

بعضی از سیستم‌ها دارای نوعی از تاخیر در خروجی هستند که با ***زمان مرده، زمان تاخیر یا تاخیر انتقالی***[۳۵] شناخته می‌شود. زمان مرده ممکن است عامل درونی یا بیرونی داشته باشد. بطور مثال، فرض کنید که یک دماسنج دمای خروجی از یک تانک را در فاصله L از خروجی درون لوله‌ای عایقبندی شده را اندازه‌گیری می‌کند. در نتیجه دمای خروجی از تانک پس از عبور از لوله اندازه‌گیری می‌شود. در بررسی دینامیک فرآیند یا مطالعات کنترلی می‌بایست اثر زمان مرده را وارد کرد.

بنا بر این، ارتباط دمای جریان ورودی به لوله و دمای دماسنج ارتباط زیر بر قرار است:

$$y(t) = x(t-\tau_d) \qquad (۴۲-۳)$$

که τ_d زمان مرده است. تابع انتقال زمان مرده خواهد بود:

$$y(t) - y_s = x(t-\tau_d) - x_s \quad \Rightarrow \quad Y(t) = X(t-\tau_d) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-\tau_d s} \qquad (۴۳-۳)$$

۳-۱۰- شناسائی سیستم[۳۶]

اگرچه می‌توان تابع انتقال سیستم‌های با درجهٔ بالاتر را بدست آورده و دینامیک آنها را بررسی کرد، اما یک روش ساده‌تر آن است که سیستم‌های دیگر را با سیستم مرتبه اول یا دوم بعلاوه زمان مرده (در صورت نیاز) تقریب زد. سیستم‌ها بطور کلی دو نوع رفتار در مقابل ورودی پله‌ای نشان می‌دهند: ۱- رفتار غیرنوسانی که بدون نوسان بسمت مقدار ماندگار می‌رود، ۲- رفتار نوسانی با ماکزیمم انحراف که پس از نوسان بسمت مقدار ماندگار می‌رود.

یک سیستم درجهٔ سوم با تابع انتقال زیر در نظر بگیرید:

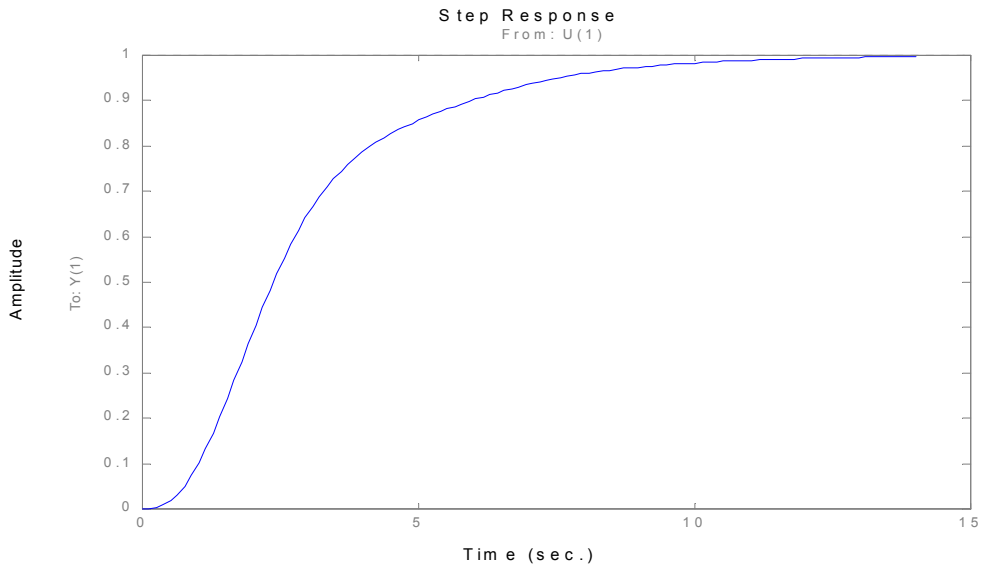
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1} \qquad (۴۴-۳)$$

پاسخ پله‌ای واحد این سیستم در شکل ۳-۱۴ رسم شده است.

---

[۳۵] Dead time, delay time, or tranportation lag

[۳۶] System identification



شکل ۳-۱۴- پاسخ پله‌ای واحد سیستم درجهٔ سوم

این سیستم را می‌توان با یک سیستم درجهٔ اول با زمان مرده تقریب زد.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\, e^{-\tau_d s}}{\tau\, s + 1} \qquad (۴۵-۳)$$

مقدار بهره k مقدار جواب در $t \to \infty$ است. برای بدست آوردن ثابت زمانی و زمان مرده روشهای متفاوتی وجود دارد. یک روش آن است که مدت زمان $1.0\, s$ را بعنوان زمان مرده در نظر گرفته و مدت زمانی که جواب به 63.2% مقدار نهائی ثابت زمانی $3.0 - 1.0 = 2.0\ s$ است. روش دوم رسم مماس در نقطهٔ عطف می‌باشد که تقاطع با محور زمان، زمان مرده و تقاطع با مقدار پایدار جدید، ثابت زمانی را می‌دهد.

فعالیت خارج از کلاس ۳-۱- روش‌های شناسائی سیستم درجهٔ دوم غیرنوسانی و نوسانی را بدست آورید.

فصل چهارم

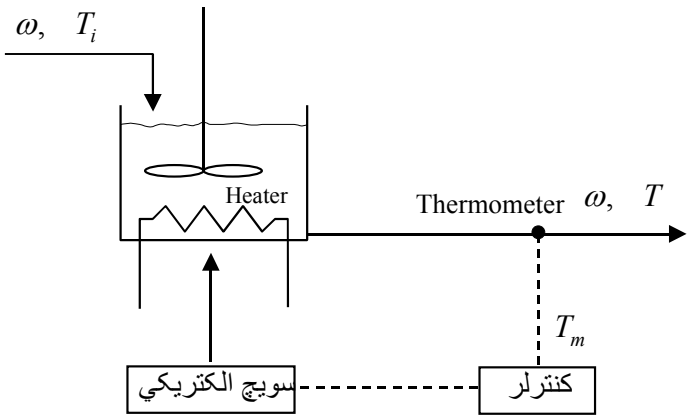
سیستم حلقه بسته

۴-۱- مقدمه

در فصل قبل نحوهٔ بررسی دینامیک چند فرآیند بررسی گردید. بنابراین، با داشتن تابع تبدیل می‌توان رفتار یک فرآیند در مقابل تغییرات ورودی را بدست آورد. اصول کلی برای بررسی دینامیک فرآیندهای مختلف یکسان می‌باشد. البته کسب مهارت در آنها نیاز به تمرین دارد. بررسی دینامیک فرآیند از مقدمات کنترل فرآیند می‌باشد.

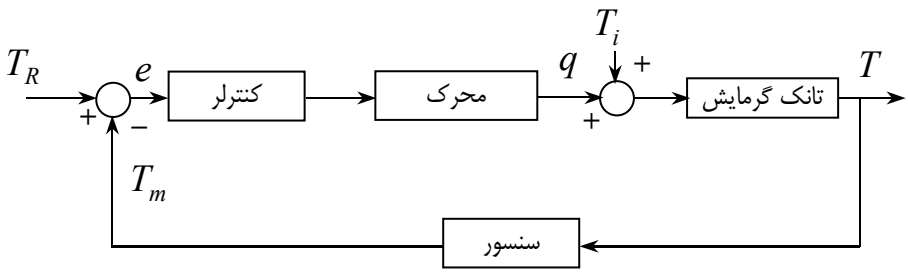
۴-۲- سیستم گرمایش یک مایع

مثال کنترل دمای یک تانک را در نظر بگیرید. شکل ۴-۱ تانکی را نشان می‌دهد که دبی جرمی ورودی و خروجی آن w می‌باشد.



شکل ۴-۱- تانک گرمایش مایع

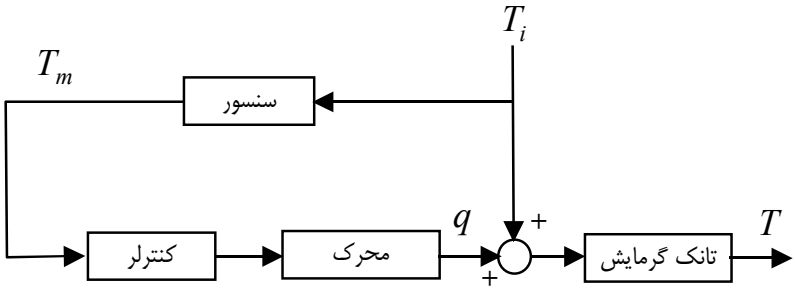
دمای جریان ورودی T_i بوده و در نظر است که دمای خروجی برابر T_R باشد. بدین منظور مقدار گرمای ورودی به تانک q توسط هیتر تنظیم می‌شود. بدین جهت دمای جریان خروجی از تانک توسط یک المان اندازه‌گیری دما[۱] مانند دماسنج یا ترموکوپل اندازه‌گرفته شده و با نقطهٔ تنظیم مقایسه می‌شود. با کسر نقطه تنظیم از مقدار اندازه‌گیری شده خطا $e = T_R - T_m$ محاسبه می‌شود. خطای مطلوب برابر صفر $e = 0$ است. اگر $e > 0$ باشد باید مقدار گرمای ورودی به تانک توسط هیتر q افزایش یافته و برعکس. مقدار گرمای q توسط کنترلر محاسبه می‌شود. این منطق که دمای خروجی اندازه‌گیری شده، پس از محاسبهٔ خطا مقدار گرمای ورودی به تانک تغییر می‌کند، روش حلقهٔ بسته فیدبک نامیده می‌شود. در یک حلقه فیدبک عموما چهار جزء اصلی وجود دارد: ۱- فرآیند، ۲- المان اندازه‌گیری، ۳- کنترلر و ۴- المان نهائی کنترل. شکل ۴-۲ دیاگرام جعبه‌ای حلقهٔ بسته فیدبک را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲- دیاگرام جعبه‌ای حلقهٔ فیدبک

یک منطق دیگر آن است که دمای ورودی قبل از ورود به تانک اندازه‌گیری شده و تغییرات لازم در گرمای ورودی به تانک اعمال شود. این منطق فیدفوروارد نامیده می‌شود. در حالت ایده‌آل کنترلر فیدفوروارد همواره مقدار $e = 0$ است. در عمل بعلت وجود اغتشاشات چنین نبوده و حتما می‌بایست فیدبک در سیستم کنترلی بوده و ممکن است با فیدفوروارد همزمان اعمال شود. شکل ۴-۳ حلقه فیدفوروارد را نشان می‌دهد.

[۱] Measuring element



شکل ۴-۳- دیاگرام جعبه‌ای فیدفوروارد

در مرحلهٔ بعد، می‌بایست تابع تبدیل هر یک از اجزاء محاسبه شده و در جعبه مخصوص خود قرار داده شود.

۴-۲-۱- تابع تبدیل فرآیند

در اینمورد دو ورودی به فرآیند موجود می‌باشد. این دو ورودی عبارتند از: ۱- انرژی ورودی توسط جریان ورودی، ۲- گرمای ورودی توسط هیتر. لذا باید در موازنهٔ انرژی هر دو در نظر گرفته شود. با فرض اختلاط ایده‌آل درون تانک و در نظر گرفتن مایع داخل تانک بعنوان حجم کنترلی، موازنه انرژی برای حجم کنترلی عبارت است از:

$$\rho CV\frac{dT}{dt} = wC\left(T_i - T_{ref}\right) - wC\left(T - T_{ref}\right) + q \qquad (۱-۴)$$

نتیجه کسر این معادله را در حالت پایدار نوشته و از خودش برابر است با:

$$\rho CV\frac{dT}{dt} = wC\left(T_i - T_{is}\right) - wC\left(T - T_s\right) + q - q_s \qquad (۱-۴)$$

با تعریف متغیرهای انحرافی زیر:

$$T_i' = T_i - T_{is}, \quad T' = T - T_s, \quad Q = q - q_s \qquad (۳-۴)$$

بنابراین،

$$\frac{\rho V}{w}\frac{dT'}{dt} = T_i' - T' + \frac{Q}{wC} \qquad (۴-۴)$$

که $\tau = \rho V/w$ بعد زمان داشته و ثابت زمانی فرآیند است. تبدیل لاپلاس این جمله پس از آرایش مجدد می‌شود:

$$T'(s) = \frac{1}{\tau s+1}T_i'(s) + \frac{1/wC}{\tau s+1}Q(s) \qquad (۵-۴)$$

اگر تابع تبدیل دمای خروجی نسبت به دمای ورودی مورد نظر باشد، تغییرات گرما را صفر گرفته و حاصل عبارت است از:

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{1}{\tau s+1} \qquad (۶-۴)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، ثابت زمانی سیستم کنترلی برای دمای ورودی و گرما مساوی است. این از مشخصه‌های سیستم‌های خطی است.

۴-۲-۲- تابع تبدیل المان اندازه‌گیری و المان نهائی کنترل

در اینمورد، یک سنسور دما برای اندازه‌گیری متغیر کنترل شونده مورد نیاز است. این المان می‌تواند یک دماسنج، ترموکوپل یا ترمومتر مقاومتی (مانند PT100) باشد. تابع تبدیل دماسنج در فصل قبل بدست آمد:

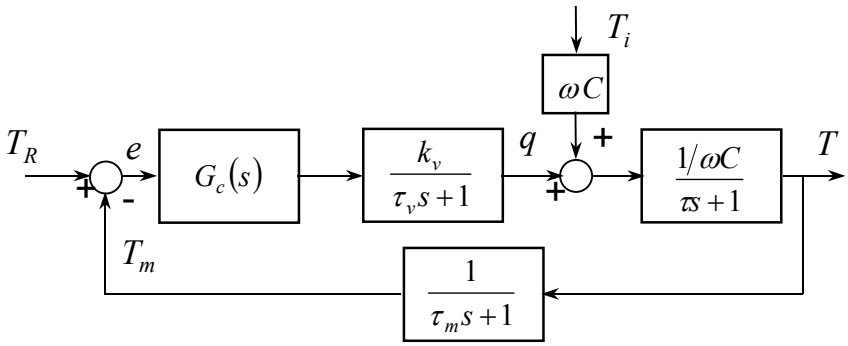
$$\frac{T_m(s)}{T(s)} = \frac{1}{\tau_m s+1} \qquad (۶-۴)$$

که $T_m(s)$ تبدیل لاپلاس متغیر انحرافی دمای دماسنج است.

منظور از المان نهائی کنترل وسیله‌ای است که بتوسط آن مقدار متغیر کنترل کننده تنظیم می‌شود. در فرآیندهای شیمیائی و پلیمری این المان عمدتا یک شیر کنترلی یا سوئیچ الکتریکی است. معمولا تابع تبدیل المان اندازه‌گیری و المان نهائی کنترل را باید از سازنده درخواست کرد و یا اطلاعاتی از کاتالوگ آنها برگرفت که تابع تبدیل را ارائه کند. در اینجا برای سادگی تابع تبدیل آن درجهٔ اول فرض می‌شود:

$$\frac{Q(s)}{M(s)} = \frac{k_v}{\tau_v s+1} \qquad (۷-۴)$$

که k_v و τ_v بترتیب بهره و ثابت زمانی المان نهائی کنترل بوده و $M(s)$ خروجی از کنترلر می‌باشد. بدین ترتیب دیاگرام جعبه‌ای این سیستم کنترلی در شکل ۴-۴ آمده است.



شکل۴-۴- دیاگرام جعبه‌ای سیستم گرمایش مایع

۴-۲-۳- تابع تبدیل کنترلر

تابع تبدیل کنترلر در شکل ۴-۴ با $G_c(s)$ نشان داده شد. ورودی به کنترلر خطا e و خروجی از آن m می‌باشد. برای بدست آوردن تابع تبدیل کنترلر باید ارتباط ریاضی بین m و e شناخته شده باشد. از نظر ریاضی هر تابع منطقی قابل قبول است.

منظور از تابع منطقی آن است که تابع با ارتباط فیزیکی بین پارامترها موافق باشد. بطور مثال اگر $e>0$ باشد باید مقدار q افزایش یابد، بنا بر این m باید بگونه‌ای تغییر کند که q را افزایش دهد و برعکس. اما از نظر عملی، باید مکانیزمی معادل با تابع ریاضی در نظر گرفته شده، ساخته شده و بر روی سیستم کنترلی نصب شود. لذا، خصوصا برای کنترلرهای مکانیکی هر دستور ریاضی را نمی‌توان بکار برد. از نظر تاریخی، چهار نوع کنترلر بطور کلاسیک استفاده می‌شوند. این کنترلرها عبارتند از: تناسبی، تناسبی-انتگرالی، تناسبی-مشتقی و تناسبی-انتگرالی-مشتقی.

کنترلر تناسبی[۱] (P) خروجی خود را متناسب با خطا تغییر می‌دهد:

$$m(t) = m_s + k_c e(t) \tag{۸-۴}$$

که $e(t)$ خطای هر لحظه، k_c ضریب تناسب یا بهرهٔ کنترلر، $m(t)$ خروجی کنترلر است. این معادله را از حالت پایدار آن کسر می‌شود، دقت شود که در حالت پایدار خطا صفر است:

$$M = m - m_s = k_c e \quad \Rightarrow \quad M(s) = k_c e(s) \tag{۹-۴}$$

[۱] Proportional controller

بنا بر این تابع تبدیل کنترلر P عبارت است از:

$$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c \tag{۱۰-۴}$$

تابع کنترلر تناسبی-انتگرالی[۱] (PI) برابر است با:

$$m(t) = m_s + k_c e(t) + \frac{k_c}{\tau_I}\int_0^t e(t)\,dt \tag{۱۱-۴}$$

که τ_I ثابت زمانی انتگرالی نامیده می‌شود. لذا، تابع تبدیل کنترلر PI خواهد بود:

$$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) \tag{۱۲-۴}$$

تابع کنترلر تناسبی-مشتقی[۲] (PD) برابر است با:

$$m(t) = m_s + k_c e(t) + k_c \tau_D \frac{de(t)}{dt} \tag{۱۳-۴}$$

که τ_D ثابت زمانی مشتقی نامیده می‌شود. لذا، تابع تبدیل کنترلر PD خواهد بود:

$$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c\left(1 + \tau_D s\right) \tag{۱۴-۴}$$

بالاخره، ***کنترلر تناسبی-انتگرالی-مشتقی***[۳] (PID) دارای تابع تبدیل زیر می‌باشد:

$$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right) \tag{۱۵-۴}$$

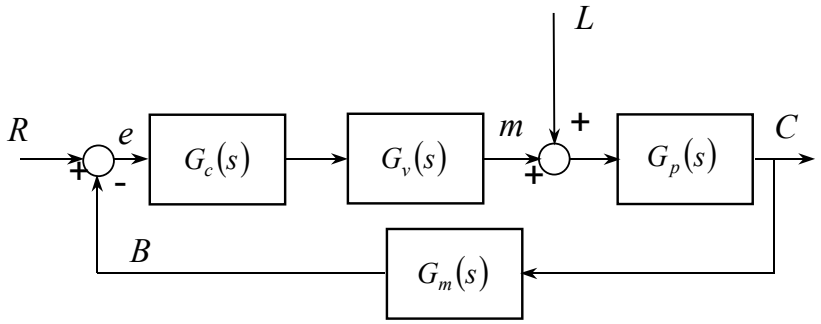
پارامترهای k_c، τ_I و τ_D به دینامیک فرآیند، المان اندازه‌گیری، المان نهائی کنترلر و نیازها از سیستم بستگی داشته و باید بهینه شوند. در کنترل کلاسیک، انتخاب نوع کنترلر و محاسبه پارامترهای آنرا ***طراحی کنترلر***[۱] می‌نامند.

۴-۳- تابع تبدیل حلقه بسته

---

[۱] Proportional-Integral controller
[۲] Proportional-Derivative controller
[۳] Proportional-Integral-Derivative controller

یک سیستم حلقه بسته فیدبک در شکل عمومی در شکل ۴-۵ نشان داده شده است. در این شکل $G_p(s)$، $G_m(s)$، $G_v(s)$ و $G_c(s)$ بترتیب توابع تبدیل فرآیند، المان اندازه‌گیری، المان نهائی کنترل و کنترلر می‌باشد. بار و نقطهٔ تنظیم دو ورودی به حلقهٔ بسته بوده و متغیرکنترل شونده خروجی حلقه می‌باشد. بنا بر این، تابع تبدیل در دو حالت قابل نوشتن است: ***حالت رگولاتوری*** که تابع تبدیل متغیر کنترل شونده به بار بوده و ***حالت Servo*** که تابع تبدیل متغیر کنترل شونده به نقطهٔ تنظیم است. دستورالعمل کلی برای بدست آوردن تابع تبدیل حلقهٔ بسته آن است که به هر یک از جریان‌ها نامی اختصاص داده و سپس ارتباط بین آنها نوشته شده و جریان‌های اضافی حذف می‌شود.



شکل ۴-۵- دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم فیدبک عمومی

در حالت رگولاتوری تابع تبدیل متغیر کنترل شونده به بار را باید بدست آورد. به معنای دیگر، نقطهٔ تنظیم تغییر نکرده و مقدار متغیر انحرافی نقطهٔ تنظیم صفر $R=0$ است. در اینصورت ارتباط بین جریان‌های مختلف عبارت است از:

$$\begin{cases} B = G_m C \\ e = -B \\ Q = G_c G_v e \\ C = G_p (L + Q) \end{cases} \qquad (۱۶-۴)$$

با حذف B، e و Q بین این معادلات بدست می‌آید که:

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m} \qquad (۱۷-۴)$$

در حالت Servo بار ثابت بوده و $L=0$ است. به طریق مشابه بدست می‌آید که:

[1] Controller design

(۱۸-۴)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m}$$

مشاهده می‌شود که مخرج دو تابع تبدیل با یکدیگر مساوی هستند، بنا بر این، حلقهٔ بسته نسبت به تغییر در بار یا نقطهٔ تنظیم دینامیک مشابه‌ای نشان می‌دهد. این از خواص سیستم‌های خطی است.

حاصلضرب تمامی توابع تبدیل موجود در حلقه با نام ***تابع تبدیل حلقهٔ باز***[۱] $G_{op}(s)$ نامیده می‌شود:

$$G_{op}(s) = G_c G_v G_p G_m \qquad (۱۹-۴)$$

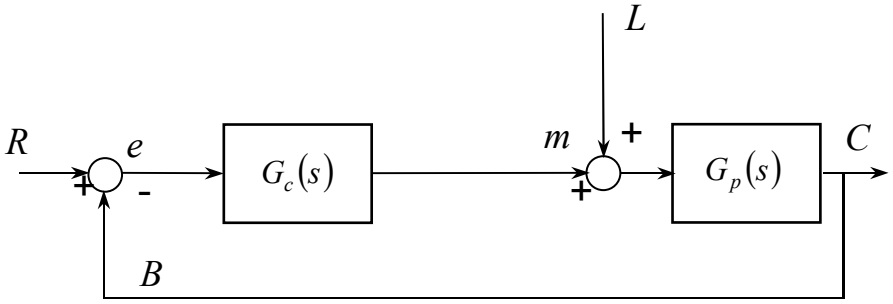
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{حاصلضرب توابع تبدیل بین } X \text{ و } Y}{1 + \text{تابع تبدیل حلقه باز}}$$

در حالت کلی برای حلقهٔ فیدبک منفی می‌توان نوشت که:

۴-۴- پاسخ سیستم حلقه بسته

برای آنکه اثر بخش‌های مختلف کنترلی بر فرآیند اولیه بررسی گردد، پاسخ سیستم حلقه بسته بررسی می‌شود. بدین منظور در فرآیند گرمایش شکل ۴-۱ مجددا در نظر گرفته می‌شود. از دینامیک المان اندازه‌گیری صرفنظر می‌شود، یعنی $\tau_m = 0$ فرض می‌شود. لازم بتذکر است که المان اندازه‌گیری و المان نهائی کنترل توسط سازنده انتخاب می‌شود. بنا بر این پیشنهاد می‌شود که هنگام خرید المان‌های خریداری شود که ثابت زمانی آنها در مقابل ثابت زمانی فرایند کم $\tau_v, \tau_m < 0.15\tau_p$ باشد. دینامیک ناچیز المان نهائی کنترل به معنی آن است که بلافاصله در مقابل تغییرات ورودی عکس‌العمل نشان داده و تاخیری وارد سیستم کنترلی نمی‌کند. همچنین از دینامیک المان نهائی کنترل $\tau_v = 0$ صرفنظر می‌شود. بهرهٔ المان نهائی کنترل در بهرهٔ کنترلر وارد می‌شود. کنترلر از نوع تناسبی در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب دیاگرام جعبه‌ای شکل ۴-۶ بدست می‌آید.

[۱] Open loop transfer function

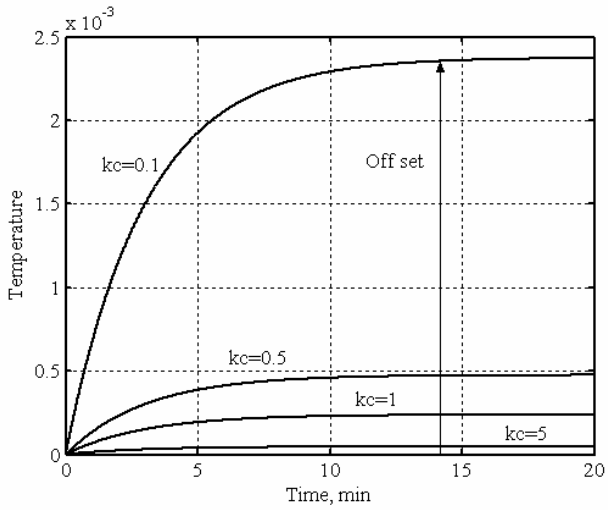


شکل ۴-۶- دیاگرام جعبه‌ای سیستم فیدبک ساده شده

در حالت رگولاتوری تابع تبدیل حلقهٔ بسته عبارت است از:

$$\frac{T(s)}{T_i'(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + k_c/wC} = \frac{\dfrac{1}{1+k_c/wC}}{\dfrac{\tau}{1+k_c/wC}s+1} \qquad (۲۰-۴)$$

ثابت زمانی و بهره عبارتند از: $\tau_{cl} = \dfrac{\tau}{1+k_c/wC}$ و $k_{cl} = \dfrac{1}{1+k_c/wC}$. همواره $\tau_{cl} < \tau$ بوده که نشان می‌دهد، حلقه فیدبک دینامیک را سریعتر می‌کند. شکل ۴-۷ پاسخ پلهٔ واحد این سیستم را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۷- پاسخ پله‌ای سیستم حلقه بسته

همانگونه که در شکل معلوم است، جواب از مقدار پایدار انحراف دارد. این مقدار ***خطای ماندگار***[۱] نامیده می‌شود. طبق تعریف خطای ماندگار عبارت است از:

[۱] Offset error

$$offset = R(\infty) - C(\infty) = T'_R(\infty) - T'(\infty) \tag{۲۱-۴}$$

در اینمورد خطای ماندگار عبارت است از:

$$offset = 0 - \frac{1}{1 + k_c / wC} = \frac{1}{1 + k_c / wC} \tag{۲۲-۴}$$

رابطه (۴-۲۲) دلالت بر این دارد که کنترلر تناسبی همواره دارای خطای ماندگار است مگر آنکه $k_c \to \infty$ باشد. بهرهٔ بی‌نهایت از نظر فیزیکی غیرممکن است، زیرا بدان معنی است که در یک لحظه مقدار بی‌نهایت انرژی به فرآیند داده شود. بنا بر این، ***کنترلر تناسبی همواره دارای خطای ماندگار است.***

اگر کنترلر از نوع تناسبی-انتگرالی PI فرض شود، تابع تبدیل کنترلر رابطهٔ (۴-۱۲) بوده و تابع تبدیل حلقهٔ بسته در حالت رگولاتوری عبارت است از:

$$\frac{T'(s)}{T_i'(s)} = \frac{1/(\tau s + 1)}{1 + k_c(1 + 1/\tau_I s)(k_c / wC / (\tau s + 1))} \tag{۲۳-۴}$$

$$\frac{T'(s)}{T_i'(s)} = \frac{(wC\tau_I / k_c)s}{(wC\tau\tau_I / k_c)s^2 + \tau_I(1 + wC/k_c)s + 1} \tag{۲۴-۴}$$

در اینحالت، سیستم درجهٔ دوم است. بهره، ثابت زمانی و ضریب میرائی عبارت است از:

$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_I}{\tau}}\frac{1 + k_c/wC}{\sqrt{k_c/wC}} \text{ و } \tau_{cl} = \sqrt{\frac{wC\tau\tau_I}{k_c}} \text{ ، } k_{cl} = \frac{wC\tau_I}{k_c} \tag{۲۵-۴}$$

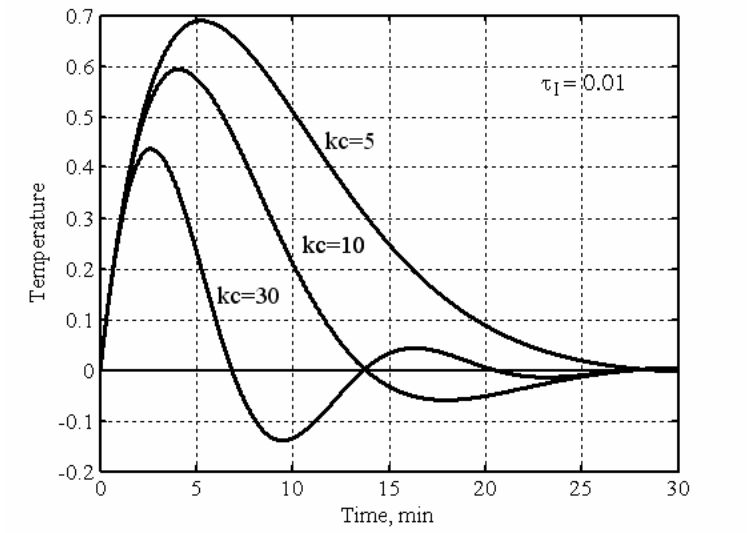
اگر $\zeta < 1$ پاسخ پلهٔ واحد این سیستم بر طبق رابطهٔ (۳-۱۱) عبارت است از:

$$T'(t) = k_{cl}\left(\frac{1}{\tau_{cl}}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta t/\tau_{cl}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau_{cl}}\right) \tag{۲۶-۴}$$

با افزودن عمل انتگرالی به کنترلر، خطای ماندگار صفر شده است:

$$offset = T'_R(\infty) - T'(\infty) = 0 - 0 = 0 \tag{۲۷-۴}$$

شکل ۴-۸ پاسخ عمومی این سیستم در مقابل کنترلرهای مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۸- پاسخ سیستم حلقه بسته با کنترلر *PI*

همین محاسبات را در حالت Servo نیز می‌توان انجام داد.

فصل پنجم

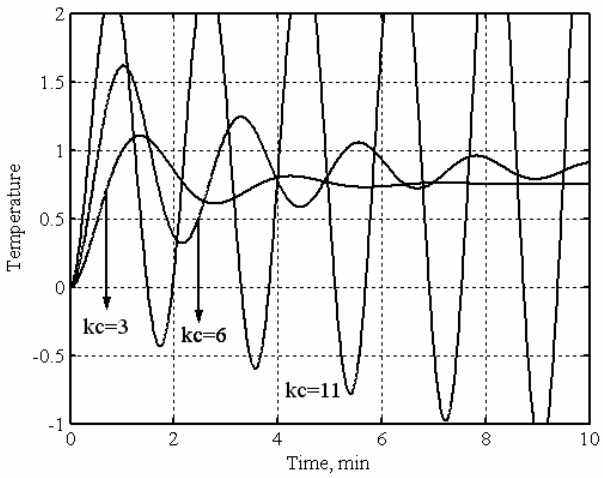
روش مکان ریشه‌ها در طراحی کنترلر

۵-۱- مقدمه

در فصل قبل نحوهٔ بررسی دینامیک فرآیندها بررسی گردید. بنابراین، با داشتن تابع انتقال می‌توان رفتار یک فرآیند در مقابل تغییرات ورودی را بدست آورد. اصول کلی برای بررسی دینامیک فرآیندهای مختلف یکسان می‌باشد. البته کسب مهارت در آنها نیاز به تمرین دارد. بررسی دینامیک فرآیند از مقدمات کنترل فرآیند می‌باشد. در این فصل مقولهٔ طراحی کنترلر و مباحث مرتبط با آن بررسی می‌شوند.

۵-۲- پایداری سیستم‌ها

همان سیستم گرمایش یک مایع با یک کنترلر PI در شکل ۴-۱ را مجددا در نظر بگیرید. جواب این سیستم در مقابل ورودی پله‌ای واحد در حالت Servo برای k_c های در شکل ۵-۱ مختلف رسم شده است. همانگونه که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش k_c جواب به سمت بی‌نهایت می‌رود. اصطلاحا گفته می‌شود که سیستم ناپایدار شده است.



شکل ۵-۱- پاسخ سیستم تانک گرمایش برای k_c های مختلف

یک سیستم ***پایدار***[1] عبارت است از سیستمی که به ازای تمامی مقادیر ورودی‌ها با دامنه محدود، خروجی آن نیز محدود باقی بماند. ورودی سینوسی نیز یک ورودی محدود می‌باشد، در $t \to \infty$ مقدار سینوس مشخص نبوده اما در هر صورت مقدار محدود دارد. در مطالعه کنترلی علاوه بر تعریف پایداری فوق، نیاز به معیاری برای پایداری است تا محدودهٔ پایدرای سیستم‌ها مشخص شود. در بخش ۴-۳ تابع انتقال کلی حلقهٔ بسته بصورت زیر بدست آمد:

$$C(s) = \frac{G_p L(s) + G_c G_v G_p R(s)}{1 + G_{op}(s)} \qquad (۱-۵)$$

از سوی دیگر، در بخش ۲-۸ راجع به ماهیت کیفی پاسخ‌ها به کمک روش تبدیل لاپلاس بحث گردید. با استفاده از آن بحث، اگر ریشه‌ها در سمت راست محور اعداد موهومی باشد، آنگاه در جواب جمله‌ای نمائی با توان مثبت وجود خواهد داشت. بنابراین، با گذشت زمان چنین جمله‌ای بی‌نهایت شده و سیستم ناپایدار خواهد شد. لذا، می‌توان معیار پایداری را به شکل زیر تعریف کرد: ***سیستمی پایدار است که ریشه‌های مخرج تابع انتقال حلقهٔ بسته در سمت چپ محور اعداد موهومی قرار داشته باشد، یا آنکه تمامی ریشه‌های معادله*** $1 + G_{op}(s) = 0$ ***دارای بخش حقیقی منفی باشند.*** $1 + G_{op}(s) = 0$ را ***معادله مشخصه***[2] نامیده می‌شود.

مثال ۵-۱- پایداری سیستم

اگر $G_p(s) = \frac{0.8}{2s+1}$ ، $G_c(s) = \frac{5s+1}{s}$ ، $G_v(s) = 1$ و $G_m(s) = 1$ باشد، پایداری حلقهٔ کنترلی را بررسی کنید.

حل- تابع انتقال حلقهٔ باز نوشته می‌شود:

$$1 + G_{op}(s) = 1 + \frac{0.8(5s+1)}{s(2s+1)} = \frac{2s^2 + 5s + 0.8}{s(2s+1)} = 0$$

بنابراین، -0.172 و -2.328 ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشند. تمامی ریشه‌های معادله مشخصه دارای بخش حقیقی منفی بوده و سیستم پایدار است.

---

[1] Stable
[2] Characteristic eq.

برای بررسی پایداری سیستم می‌توان از دستور roots در نرم‌افزار MATALB استفاده کرد. اما بر محاسبات ساده می‌توان از تست روث استفاده کرد.

۵-۳- تست روث

برای بررسی پایداری سیستم‌ها یکی از روشها، **تست روث**[۱] اگرچه استفاده از کامپیوتر مناسبتر است، اما برای محاسبات سریع و دستی این روش کارآئی بالای دارد. لذا، در اینجا بدون اثبات تست روث ارائه می‌شود. مهمترین محدودیت در تست روث آن است که معادله مشخصه باید چندجمله‌ای بر حسب s باشد. این چند جمله‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \qquad a_0 > 0 \tag{۵-۲}$$

در اینحالت اگر حتی یکی از ضرائب a_i منفی باشد، در اینصورت سیستم قطعا ناپایدار است. اما اگر تمامی ضرائب مثبت باشند، نمی‌توان راجع به پایداری آن قضاوت کرده و باید جدول روث تشکیل شود. جدول روث عبارت است از:

ردیف				
1	a_0	a_2	a_4	a_6
2	a_1	a_3	a_5	a_7
3	b_1	b_2	b_3	
4	c_1	c_2	c_3	
5	d_1	d_2		
6	e_1	e_2		
⋮	f_1			
n+1	g_1			

در این جدول داریم که:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 a_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned} \tag{۵-۳}$$

[۱] Routh test

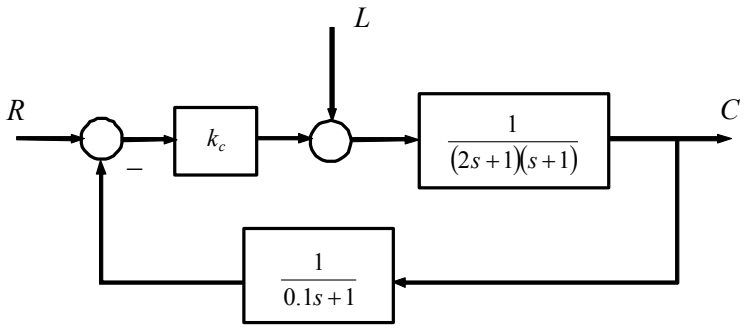
قضیه پایداری روث چنین است: ۱- شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که تمامی اعضای ستون اول مثبت و غیر صفر باشند، ۲- اگر عضوی در ستون اول منفی باشد، سیستم ناپایدار بوده و بتعداد دفعات تغییر علامت ریشه در سمت راست محور اعداد موهومی قرار دارد، ۳- اگر عضو ردیف nام صفر باشد، دو ریشه موهومی روی محور اعداد موهومی وجود دارد که از رابطهٔ زیر بدست می‌آیند:

$$Cs^2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm\sqrt{\frac{D}{C}} \tag{۴-۵}$$

که C و D دو عضو اول ردیف $(n-1)$ام هستند.

۵-۴- مکان ریشه‌ها

در بخش قبل ملاحظه شد که مقدار ریشه‌های معادله مشخصه نشانگر پایداری می‌باشند. البته حتی اگر سیستم پایدار باشد، ریشه‌های معادله مشخصه نحوهٔ رفتار دینامیکی سیستم رانشان می‌دهد. برای یک سیستم با فرآیند، المان اندازه‌گیری و المان نهائی کنترل خاص مقدار عددی ریشه‌های بستگی به پارامترهای کنترلر انتخاب شده دارد. البته تغییر هر سه پارامتر k_c، τ_I و τ_D و تحلیل ریشه‌ها پیچیده بوده، در عمل معمولا دو پارامتر τ_I و τ_D ثابت در نظر گرفته شده و تنها k_c تغییر می‌کند. بطور مثال، سیستم حلقه بسته شکل ۵-۲ را در نظر بگیرید.



شکل ۵-۲- دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترلی، معادله مشخصه $1 + \frac{k_c}{(2s+1)(s+1)(0.1s+1)} = 0$

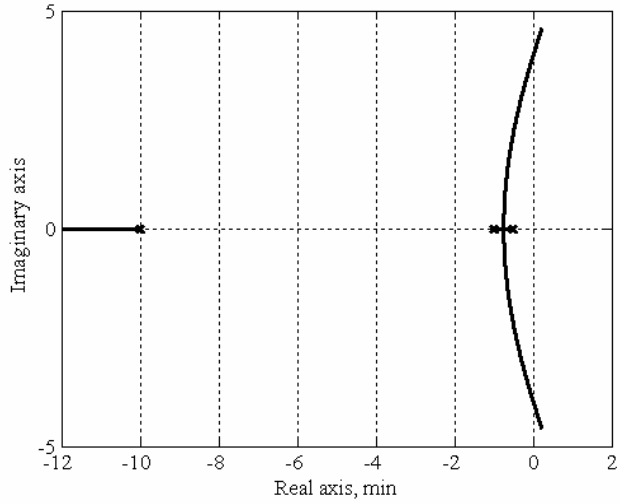
جدول ۵-۲ مقدار عددی ریشه‌ها بر حسب k_c را ارائه می‌کند.

جدول ۵-۲- ریشه‌های سیستم شکل ۵-۲ بر حسب k_c

k_c	ریشه اول	ریشهٔ دوم	ریشهٔ سوم
۰	-۰,۵	-۱	-۱۰
۰,۱	-۰,۶۵۵	-۰,۸۳۹	-۱۰,۰۰۶
۰,۱۱۷	-۰,۷۲۸	-۰,۷۶۵	-۱۰,۰۰۶۷
۰,۱۱۵۶۴۶	-۰,۷۴۶	-۰,۷۴۶	-۱۰,۰۰۶۸
۰,۱۱۶	-۰,۷۴۶۶-۰,۰۱۳۸I	-۰,۷۴۶۶+۰,۰۱۳۸I	-۱۰,۰۰۶۸
۰,۲	-۰,۷۴۴-۰,۲۱۳I	-۰,۷۴۴+۰,۲۱۳I	-۱۰,۰۱۱۲
۴	-۰,۶۳۵-۱,۴۲۵I	-۰,۶۳۵+۱,۴۲۵I	-۱۰,۲۲۳
۲۵	-۰,۱۷۲-۳,۴۰۹I	-۰,۱۷۲+۳,۴۰۹I	-۱۱,۱۵۵
۳۴,۶۵	-۳,۹۳۷I	+۳,۹۳۷I	-۱۱,۵
۵۰	۰,۲۴۱-۴,۶۰۷I	۰,۲۴۱+۴,۶۰۷I	-۱۱,۹۸

همانگونه که از جدول مشخص است با افزایش k_c از صفر (حلقه باز) ماهیت ریشه‌ها تغییر می‌کند. بدین ترتیب که ابتداء هر سه ریشه حقیقی منفی، سپس دو ریشه موهومی اما بخش حقیقی منفی و در نهایت دو ریشه موهومی دارای بخش حقیقی مثبت می‌شوند. لذا با افزایش k_c سیستم تغییر رفتار داده و نهایتا ناپایدار می‌شود. شکل ۵-۳ ریشه‌ها را در مختصات موهومی- حقیقی نشان می‌دهد. این شکل را ***مکان ریشه‌های***[1] این سیستم می‌نامند.

[1] Root locus



شکل ۵-۳- مکان ریشه‌های سیستم شکل ۵-۲

محل دقیق برخورد با محور موهومی را می‌توان با استفاده بند ۳ تست روث بدست آورد. محاسبه ریشه‌ها با تغییر k_c معمولا طولانی است. ضمنا مکان دقیق ریشه‌ها کمتر مورد نیاز است. بدین منظور روشی برای رسم تقریبی مکان ریشه‌ها وجود دارد. معادله مشخصه را می‌توان بصورت زیر نشان داد:

$$1+G_{op}(s)=1+K\frac{N}{D}=1+K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=0 \qquad (۵-۵)$$

که N و D چندجمله‌ایهای صورت و مخرج می‌باشند. z_i ریشهٔ صورت و p_j ریشه مخرج است. ریشه‌های صورت را ***صفر***[۱] و ریشه‌های مخرج را ***قطب***[۲] می‌نامند. برای سیستم‌های فیزیکی همواره $n \geq m$ است.

قوانین رسم تقریب مکان ریشه‌ها عبارتند از:

۱- تعداد شاخه‌ها در دیاگرام مکان ریشه‌ها n تا می‌باشد.

۲- هر شاخه از یک قطب شروع شده و به یک صفر خاتمه یافته یا به بی‌نهایت می‌رود. بنابراین، $n-m$ شاخه به بی‌نهایت می‌رود.

۳- بخشی از محور اعداد حقیقی که در سمت راست آن تعداد مجموع صفرها و قطب‌ها زوج باشد، جزء از مکان ریشه‌ها است.

---

[۱] Zero
[۲] Pole

۴- $n-m$ شاخه که بی‌نهایت می‌روند دارای خطوی مجانب هستند. تمامی این خطوط مجانب از نقطه‌ای بنام ***مرکز ثقل***[۱] عبور می‌کنند:

$$\gamma = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} \qquad (۶-۵)$$

شیب این خطوط (با محور اعداد حقیقی) برابر است با:

$$slope = (2k+1)\frac{\pi}{n-m} \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-,m-1 \qquad (۷-۵)$$

۵- محلی که مکان ریشه‌ها از محور اعداد حقیقی خارج و یا به محور اعداد حقیقی وارد می‌شوند، ***نقطه شکست یا جدائی***[۲] نام دارد. محل این نقاط از حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-z_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s-p_j} \qquad (۸-۵)$$

توصیه اکید می‌شود که این معادله را با حدس و خطا و یا روشهای عددی حل کنید. زاویه خروج و یا ورود به محور اعداد حقیقی $\pm\pi/2$ است.

۶- اگر یک قطب و یا صفر q بار تکرار شوند، بنابراین، q شاخه از آن قطب خارج و یا q شاخه به آن صفر وارد می‌شوند. زوایای خروج از قطب مکرر عبارت است از:

$$\theta = \frac{1}{q}\left[(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{m} \angle(p_a - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq a}}^{n} \angle(p_a - p_j)\right], \quad k = 0,1,2,\cdots,q-1 \qquad (۹-۵)$$

زوایای ورود شاخه به صفر مکرر عبارت است از:

$$\theta = \frac{1}{q}\left[(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^{n} \angle(z_b - p_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq b}}^{m} \angle(z_b - z_i)\right], \quad k = 0,1,2,\cdots,q-1 \qquad (۱۰-۵)$$

بعنوان دستورالعمل کلی قطب‌ها مکان ریشه را جذب کرده و صفرها مکان ریشه را دفع می‌کنند.

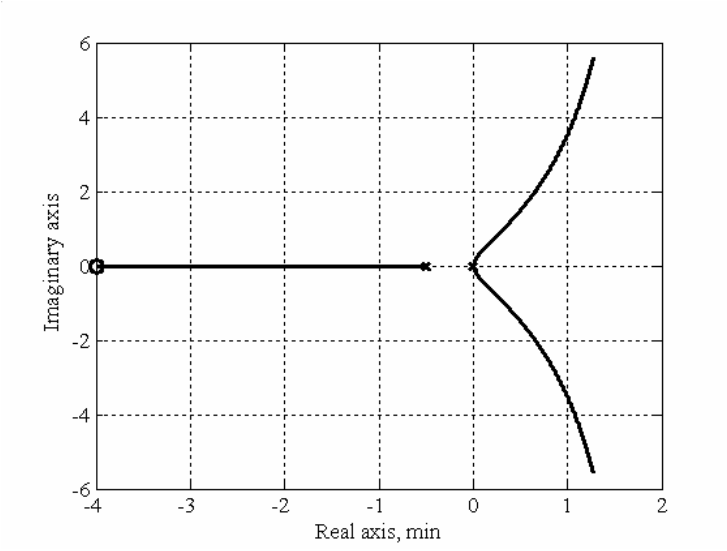
مثال ۵-۲- مکان ریشه‌ها

---

[۱] Center of Gravity
[۲] Breakaway point

مکان ریشه‌ها را برای سیستمی با تابع انتقال حلقهٔ باز $G_{op}(s)=\dfrac{s+4}{s^2(2s+1)}$ را رسم کنید.

حل- مکان ریشه‌ها در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۵-۴- مکان ریشه‌ها برای مثال ۵-۲

۵-۵- معیارهای تعیین مکان ریشه‌ها

در بحث مکان ریشه‌ها دو سئوال اصلی وجود دارد: ۱- آیا یک نقطهٔ خاص جزو مکان ریشه‌ها می‌باشد؟ ۲- بهرهٔ متناظر با یک نقطه روی مکان ریشه‌ها چقدر است؟ برای پاسخگوئی به این دو سئوال معادله مشخصه در مختصات قطبی نوشته می‌شود:

$$K\frac{N}{D}=-1 \quad \Rightarrow \quad K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1 \tag{۱۱-۵}$$

قدرمطلق و زاویه دو طرف مساوی می‌باشند:

$$K\frac{|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=1 \tag{۱۲-۵}$$

$$\begin{aligned}&\angle(s-z_1)+\angle(s-z_2)+\cdots+\angle(s-z_m)\\&\qquad-\angle(s-p_1)-\angle(s-p_2)-\cdots-\angle(s-p_n)=(2i+1)\pi\end{aligned} \tag{۱۳-۵}$$

رابطهٔ (۵-۱۲) معیار قدر مطلق‌ها و رابطهٔ (۵-۱۳) معیار زاویه‌ها نامیده می‌شود. برای تعیین اینکه نقطهٔ مشخص بر روی مکان ریشه‌ها است، از معیار زاویه‌ها استفاده می‌شود. مقدار بهره K برای یک نقطهٔ مشخص بر روی مکان

ریشه‌ها با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۲) بدست می‌آید. برای تعیین زوایا و قدرمطلق‌ها در این روابط از طریق ترسیمی نیز قابل اندازه‌گیری هستند.

۵-۶- طراحی کنترلر

منظور از طراحی کنترلر، انتخاب نوع کنترلر و محاسبه بهترین مقادیر پارامترهای کنترلر است. در کنترل کلاسیک یا خطی چهار نوع کنترلر بطور سنتی تعریف و استفاده می‌شوند. این کنترلرها عبارتند از: کنترلرهای P، PI، PD و PID. انتخاب نوع کنترلر بستگی به نیازهای فرآیند، هزینه مورد نظر و مهارت فرد دارد. شکل ۴-۸ پاسخ کیفی این کنترلرها را ارائه می‌کند. کنترلر P همواره دارای خطای ماندگار است. در برخی از فرآیندها مانند سیستم گرمایش تاسیسات این خطا چندان مهم نبوده و قابل تحمل است. اما در بعضی از فرآیندها نظیر پلیمریزاسیون یا صنایع داروی تغییرات دما تاثیر مهمی بر محصول دارد. با افزایش عمل انتگرالی، خطای ماندگار حذف می‌شود. لذا کنترلر PI برای فرآیندهای که خطای ماندگار باید صفر باشد استفاده می‌شود. عمل مشتقی باعث افزایش سرعت پاسخ دهی شده و عموما خطای ماندگار را کاهش داده اما حذف نمی‌کند. در نهایت کنترلر PID علاوه بر حذف خطای ماندگار، سریعتر نیز پاسخ می‌دهد. اما کنترلر PID گران نیز بوده و ممکن است از نظر اقتصادی مقرون بصرفه نباشد. بنابراین، انتخاب نوع کنترلر نیاز به تجربه و ذوق طراح دارد. بهترین راه شروع شبیه‌سازی حلقه کنترلی (نرم‌افزار MATLAB دارای امکانات ویژه نظیر Simulink برای شبیه سازی سیستم‌های کنترلی می‌باشد) و مشاهده رفتار سیستم در مقابل کنترلرهای مختلف یا پارامترهای مختلف یک کنترلر خاص می‌باشد. در ادامه به روش‌های مرسوم به طراحی کنترلر پرداخته می‌شود.

۵-۶-۱- روش جانمائی قطب

روش جانمائی قطب[1] یکی از روشهای ساده می‌باشد. بدین ترتیب که، بر روی مکان ریشه‌ها یک نقطه خاص بعنوان محل ریشه‌های مناسب و مطلوب برای سیستم حلقه بسته انتخاب می‌شود. سپس مقدار بهره کنترلر با استفاده از معیار قدرمطلق‌ها محاسبه می‌شود. معیارهای که در انتخاب محل مناسب ریشه‌ها استفاده می‌شوند عبارتند از:

۱- هر چه ریشه‌ها به سمت منفی بی‌نهایت متمایل شوند، سیستم دارای دینامیک سریعتری بوده و مرحلهٔ گذرای آن کوتاهتر است.

۲- ریشه موهومی به معنی نوسانی بودن سیستم و در نتیجه امکان استهلاک بخش‌های مختلف فرآیند می‌شود. هر چه مقدار بخش موهومی بیشتر باشد، آنگاه سیستم نوسانی‌تر می‌باشد.

۳- همواره می‌بایست یک حاشیه امن با محور اعداد موهومی در نظر گرفته و سعی شود که ریشه‌ها وارد این حاشیه امن نشوند. علت این موضوع آن است که، با گذشت زمان، فرآیند کهنه شده و لذا رفتار دینامیکی آن تغییر می‌یابد و ممکن است ریشه‌ها به سادگی به سمت راست محور اعداد موهومی منتقل شده و سیستم ناپایدار شود.

۵-۶-۲- روشهای یک معیاری در طراحی کنترلر

در این روشها، یک معیار مهم بعنوان تابع هدف تعریف می‌شود. بطور مثال در یک فرآیند در نظر است که حداکثر انحراف تا حد امکان کم باشد. مراحل زیر ترتیب طراحی کنترلر را نشان می‌دهد.

۱- یک معیار با توجه به نیاز فرآیند و مهارت فرد انتخاب می‌شود.

۲- نوع رگولاتوری یا Servo فرآیند انتخاب می‌شود.

۳- سپس تابع انتقال حلقهٔ بسته نوشته می‌شود.

۴- یک ورودی پله‌ای به سیستم اعمال شده و پاسخ محاسبه می‌شود.

۵- معیار انتخاب شده بر حسب پارامترهای کنترلر محاسبه می‌شود.

۶- پارامترهای کنترلر بگونه‌ای محاسبه می‌شوند که معیار شده ***بهینه***[2] شود.

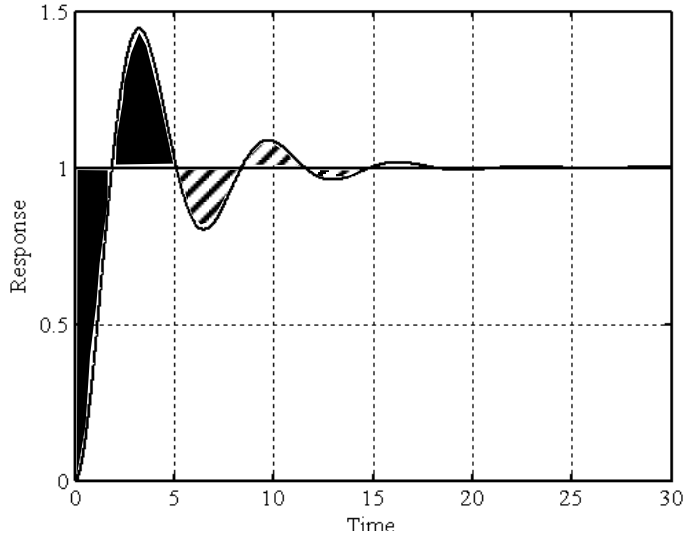
معیارهای متفاوتی وجود دارند مانند: حداکثر انحراف، ضریب میرائی، زمان پاسخ و ۰۰۰. برخی از این معیارهای اثر معکوس بریکدیگر دارند. کاهش حداکثر انحراف باعث افزایش زمان پاسخ شده و برعکس. یکی از بهترین معیارها که به تجربه بدست آمده ضریب میرائی 1/4 می‌باشد.

۵-۶-۳- معیارهای انتگرالی در طراحی کنترلر

---

[1] Pole displacement method
[2] Optimum

روشهای یک معیاری تنها یک نقطه بر روی پاسخ را در نظر می‌گیرند. در حالیکه تمامی پاسخ در انتخاب کنترلر مناسب است. روش‌های انتگرالی جایگزین مناسبی برای روشهای یک معیاری است. شکل ۵-۵ یک پاسخ نمونه را نشان می‌دهد. در روشهای یک معیاری تنها یک یا چند نقطه از این منحنی استفاده می‌شوند. اما اگر سعی شود که سطح هاشور خورده حداقل شود، در اینصورت توازنی بین حداکثر انحراف، زمان پاسخ و دیگر مشخصه‌های پاسخ ایجاد می‌شود.



شکل ۵-۵- یک پاسخ نمونه

سطح هاشور خورده عبارت است از:

$$IAE = \int_0^\infty |e| dt \qquad (۱۴-۵)$$

به این معیار، ***انتگرال قدرمطلق خطا***[1] گفته می‌شود. با توجه به اینکه خطا ممکن است تغییر علامت دهد از قدر مطلق خطا استفاده شده است. معیارهای انتگرالی دیگر عبارتند از:

$$ITAE = \int_0^\infty t|e| dt \qquad (۱۵-۵)$$

این معیار، ***انتگرال توزین زمانی قدر مطلق خطا***[1] نامیده می‌شود. با توجه به اینکه این معیار اثر خطاهای که در زمان‌های بزرگ رخ می‌دهد بزرگتر می‌کند، بنابراین باعث کاهش خطا در زمان‌های بزرگ می‌شود. معیار دیگر عبارت است از:

[1] Integral of the Absolute value of the Error

(۱۶-۵)

$$ISE = \int_0^\infty e^2\, dt$$

این معیار، ***انتگرال مربع خطا***[2] نامیده می‌شود. این معیار اثر خطاهای بزرگ را بیشتر در نظر گرفته و آنها را کاهش می‌دهد. این سه معمولترین معیارهای انتگرالی می‌باشند. اما طراح می‌تواند با توجه به هنر خود و نیازی که احساس می‌کند، معیار جدیدی تعریف کند، مانند:

$$\int_0^\infty te^2\, dt \qquad (۱۷-۵)$$

مراحل استفاده از این معیارها عبارتند از:

۱- انتخاب نوع کنترلر و نوع سیستم (رگولاتوری یا Servo).

۲- بدست آوردن تابع انتقال سیستم حلقهٔ بسته.

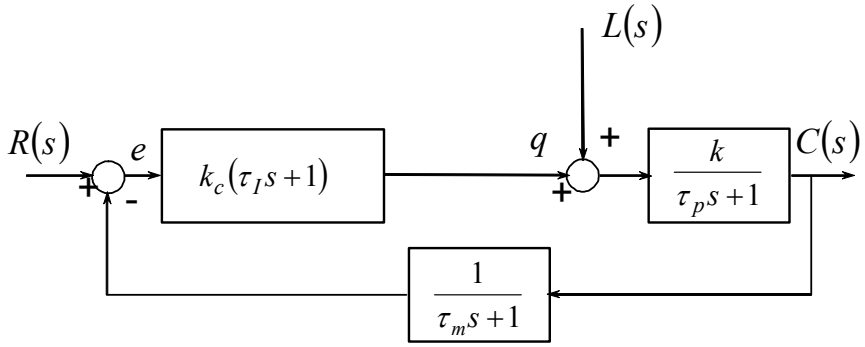
۳- وارد کردن یک تغییر پله‌ای.

۴- انتخاب معیار انتگرالی مناسب.

۵- محاسبه معیار انتگرالی بر حسب پارامترهای کنترلر.

۶- می‌نیمم کردن معیار انتگرالی و محاسبه پارامترهای کنترلر بهینه.

در نظر بگیرید که برای سیستم شکل ۵-۶ زیر با استفاده از معیار $ITAE$ یک کنترلر PI برای حالت رگولاتوری طراحی شود.



شکل ۵-۶- سیستم حلقه بسته

[1] Integral of the Time wighted of the absolute value of the Error
[2] Integral of the Squre value of the Error

تابع انتقال حلقهٔ بسته عبارت است از:

$$\frac{C(s)}{L(s)}=\frac{\dfrac{k}{\tau_p s+1}}{1+\dfrac{k_c(\tau_I s+1)}{s}\dfrac{k}{\tau_p s+1}\dfrac{1}{\tau_m s+1}}=\frac{k\left(\tau_m s^2+s\right)}{\tau_p\tau_m s^3+\left(\tau_p+\tau_m\right)s^2+\left(1+k\cdot k_c\tau_I\right)s+k\cdot k_c}$$

یک تغییر پله‌ای واحد به بار اعمال می‌شود:

$$C(s)=\frac{1}{s}\frac{k\left(\tau_m s^2+s\right)}{\tau_p\tau_m s^3+\left(\tau_p+\tau_m\right)s^2+\left(1+k\cdot k_c\tau_I\right)s+k\cdot k_c}$$

معکوس لاپلاس این معادله عبارت است از:

$$C(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{k\left(\tau_m s^2+s\right)}{\tau_p\tau_m s^3+\left(\tau_p+\tau_m\right)s^2+\left(1+k\cdot k_c\tau_I\right)s+k\cdot k_c}\right\}$$

با استفاده از این مقدار خطا محاسبه می‌شود:

$$e(t)=R(t)-C(t)=R(t)-\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{k\left(\tau_m s^2+s\right)}{\tau_p\tau_m s^3+\left(\tau_p+\tau_m\right)s^2+\left(1+k\cdot k_c\tau_I\right)s+k\cdot k_c}\right\}$$

اکنون می‌توان مقدار $ITAE$ را محاسبه کرد:

$$ITAE=\int_0^\infty t\left|R(t)-\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{k\left(\tau_m s^2+s\right)}{\tau_p\tau_m s^3+\left(\tau_p+\tau_m\right)s^2+\left(1+k\cdot k_c\tau_I\right)s+k\cdot k_c}\right\}\right|dt$$

این معیار تابعی از پارامترهای کنترلر است. با می‌نیمم کردن این عبارت مقادیر بهینه پارامترهای کنترلر بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial ITAE}{\partial k_c}=0\\[2ex]\dfrac{\partial ITAE}{\partial \tau_I}=0\end{cases}$$

با حل این دو معادله و دو مجهول کنترل مناسب طراحی می‌شود.

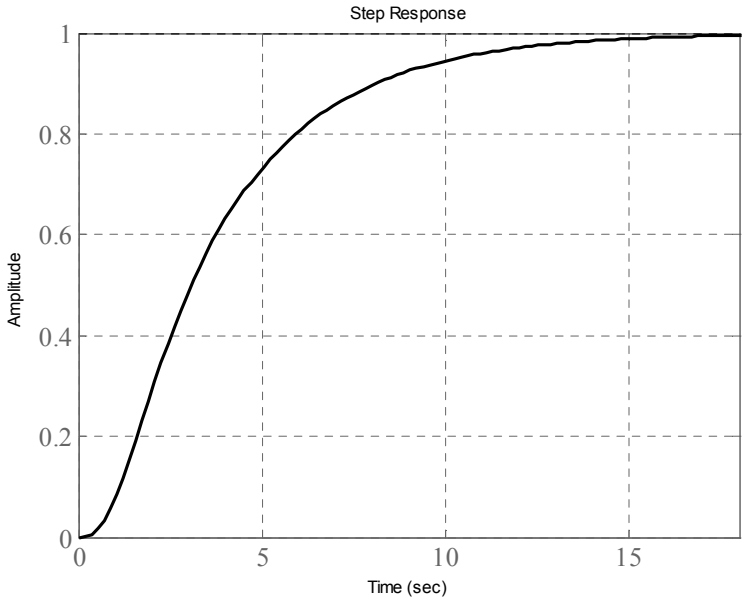
۵-۷- روش Cohen-Coon

Cohen-Coon برای سیستم درجهٔ اول با تاخیر انتقالی محاسبات طراحی کنترلر را انجام داده و با روش *IAE* مقادیر پارامترهای کنترلر را بدست آوردند. البته تمامی فرآیندها سیستم درجهٔ اول با تاخیر انتقالی نیستند، اما آنها برای سیستم بودن نوسان روش زیر را برای تقریب ارائه کردند:

۱- حلقه کنترلی را در محدودهٔ فیدبک باز کرده و کنترلر را نیز از حلقه خارج می‌کنیم.

۲- یک تغییر پله‌ای به المان نهائی کنترل وارد کرده و خروجی المان اندازه‌گیر را ثبت می‌کنیم.

۳- خروجی المان اندازه‌گیر را رسم می‌کنیم. این شکل را منحنی واکنش فرآیند می‌نامند[1]. شکل ۵-۷ یک منحنی واکنش فرآیند نوعی را نشان می‌دهد. اگر سیستم رفتار نوسانی نشان دهد، در اینصورت نمی‌توان از این روش برای طراحی کنترلر استفاده کرد.



شکل ۵-۷- یک منحنی واکنش فرآیند

سپس پارامترهای سیستمی به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$G_p(s) = \frac{k_p e^{-T_d s}}{Ts+1} \qquad (۱۸-۵)$$

پارامترهای کنترلر در جدول ۵-۳ داده شده‌اند.

[1] Process reaction curve

جدول ۵-۳- پارمترهای کنترلر سیستم مرتبهٔ اول با تاخیر انتقالی و روش Cohen-Coon

	k_c	τ_I	τ_D
P	$\frac{1}{k_p}\frac{T}{T_d}\left(1+\frac{T_d}{3T}\right)$	----------	----------
PI	$\frac{1}{k_p}\frac{T}{T_d}\left(\frac{9}{10}+\frac{T_d}{12T}\right)$	$T_d\,\frac{30+3T_d/T}{9+20T_d/T}$	---------
PD	$\frac{1}{k_p}\frac{T}{T_d}\left(\frac{5}{4}+\frac{T_d}{6T}\right)$	----------	$T_d\,\frac{6-2T_d/T}{22+3T_d/T}$
PID	$\frac{1}{k_p}\frac{T}{T_d}\left(\frac{4}{3}+\frac{T_d}{4T}\right)$	$T_d\,\frac{32+6T_d/T}{13+8T_d/T}$	$T_d\,\frac{4}{11+2T_d/T}$

۵-۸- روش تجربی تنظیم کنترلر

یک روش تقریبی و تجربی برای تنظیم کنترلر بر روی فرآیند بدین ترتیب است که سخت افزار فرآیند بیکدیگر متصل شده و حلقه بسته کنترلی عملا بوجود می‌آید. اکنون مراحل زیر بترتیب انجام می‌گیرد:

۱- τ_I را حداکثر مقدار ممکنه و τ_D را صفر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب عملا تنها عمل تناسبی در مدار می‌باشد.

۲- k_c را بتدریج زیاد کرده و خروجی را مشاهده می‌کنیم. اگر خروجی نوسانی شد، آستانه ناپایداری بدست آمده است. k_c را نصف این مقدار قرار می‌دهیم.

۳- τ_I را بتدریج کم کرده تا مجددا سیستم نوسانی شود. τ_I را $1.2-1.5$ برابر این مقدار قرار می‌دهیم.

۴- τ_D را بتدریج زیاد می‌کنیم تا سیستم نوسانی شود. τ_D را $0.5-0.6$ این مقدار قرار می‌دهیم.

فصل ششم

روش پاسخ فرکانسی در طراحی کنترلر

۶-۱- مقدمه

در فصل سوم پاسخ سینوسی سیستم‌های درجهٔ اول و دوم بررسی گردیدند. پاسخ سینوسی مبنای روش پاسخ فرکانسی می‌باشد. البته در فرآیندهای شیمیائی و پلیمری بندرت ورودی سینوسی وجود دارد. اما از آنجا که پاسخ فرکانسی یکی از روش‌های مهم و دقیق در بررسی دینامیک فرآیندها و طراحی کنترلر می‌باشد. این روش در این فصل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

۶-۲- قانون جایگذاری[1]

تابع انتقال سیستم درجهٔ اول در فصل سوم معرفی گردید:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \qquad (۸-۳)$$

نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز در مقابل ورودی سینوسی بصورت زیر محاسبه گردید:

$$AR = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}, \quad \varphi = -Arc\tan(\tau\omega) \qquad (۱۲-۳)$$

این نسبت دامنه و اختلاف فاز بگونه‌ای دیگر نیز قابل محاسبه هستند. بجای s عبارت $j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$) قرار داده می‌شود:

$$G(j\omega) = \frac{k}{\tau\,\omega\, j + 1} \qquad (۱-۶)$$

هر عدد موهومی را می‌توان در مختصات قطبی نوشت:

$$a + bj = r\angle\theta, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\frac{b}{a}$$

عدد موهومی رابطهٔ (۵-۱) در مختصات قطبی نوشته می‌شود:

$$G(j\omega)=\frac{k}{\tau\omega j+1}=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}\angle-\arctan(\tau\omega) \qquad (۲-۶)$$

مشاهده می‌شود که اگر $G(j\omega)$ در مختصات قطبی نوشته شود، قدر مطلق همان نسبت دامنه‌ها و زوایه همان اختلاف فاز در مقابل ورودی سینوسی می‌باشد. این موضوع برای تمامی سیستم‌ها صادق بوده و به نام قانون جایگذاری شناخته می‌شود که: اگر در تابع انتقال بجای s عبارت $j\omega$ قرار داده شده و عدد موهومی حاصله در مختصات قطبی نوشته شود، آنگاه قدرمطلق همان نسبت دامنه‌ها و زاویه همان اختلاف فاز خواهد بود.

مثال ۶-۱ - قانون جایگذاری

نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز سیستم درجهٔ دوم در مقابل ورودی سینوسی را بدست آورید.

حل - از قانون جایگذاری استفاده می‌شود:

$$G(s)=\frac{k}{\tau^2 s^2+2\tau\varsigma s+1}\xrightarrow{s\to j\omega}G(j\omega)=\frac{k}{-\tau^2\omega^2+2\tau\varsigma\omega j+1}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\tau^2\omega^2\right)^2+\left(2\varsigma\tau\omega\right)^2}}\angle Arc\tan\left(\frac{-2\varsigma\tau\omega}{1-\omega^2\tau^2}\right)$$

مثال ۶-۲- تاخیر انتقالی

نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز تاخیر انتقالی را بدست آورید.

حل - از قانون جایگذاری استفاده می‌شود:

$$G(s)=e^{-\tau_d s}\xrightarrow{s\to j\omega}G(j\omega)=e^{-\tau_d\omega j}=\cos\tau_d\omega-j\sin\tau_d\omega$$

نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز برابر است با:

$$AR=\left|e^{-\tau_d\omega j}\right|=1,\quad \varphi=\angle e^{-\tau_d\omega j}=-\tau_d\omega$$

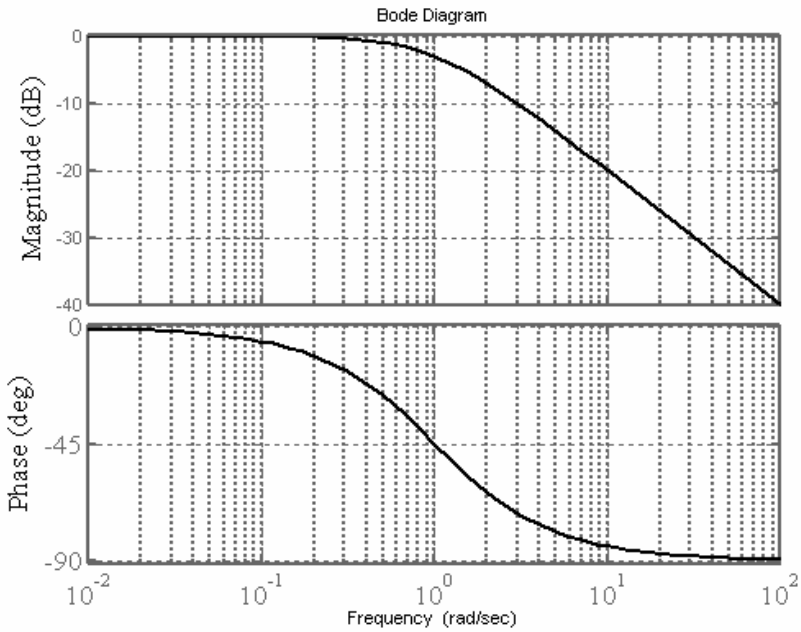
[۱] Substitution Rule

۶-۳- دیاگرام بد[1]

نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز حاوی مشخصه‌های دینامیکی فرآیند می‌باشند. لذا می‌توان برای بررسی دینامیک فرآیندها و طراحی کنترلر از آنها استفاده کرد. یکی از بهترین ابزارها دیاگرام بد می‌باشد. دیاگرام بد رسم نسبت دامنه‌ها بر حسب فرکانس زاویه‌ای در مختصات لگاریتمی و رسم اختلاف فاز بر حسب فرکانس زاویه‌ای در مختصات نیمه لگاریتمی می‌باشد. این دو منحنی معمولا زیر یکدیگر رسم می‌شوند. بطور مثال دیاگرام سیستم درجهٔ اول را در نظر بگیرید. حاصل لگاریتم از طرفین رابطهٔ (۳-۱۲) برابر است با:

$$\log AR = -\frac{1}{2}\log\left[1+\left(\tau\,\omega\right)^2\right] \qquad (۶-۳)$$

رسم نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز در شکل ۶-۱ نشان داده شده است.



شکل ۶-۱- دیاگرام بد سیستم درجهٔ اول

مثال ۶-۳- دیاگرام بد

دیاگرام سیستم مرتبهٔ دوم را رسم کنید.

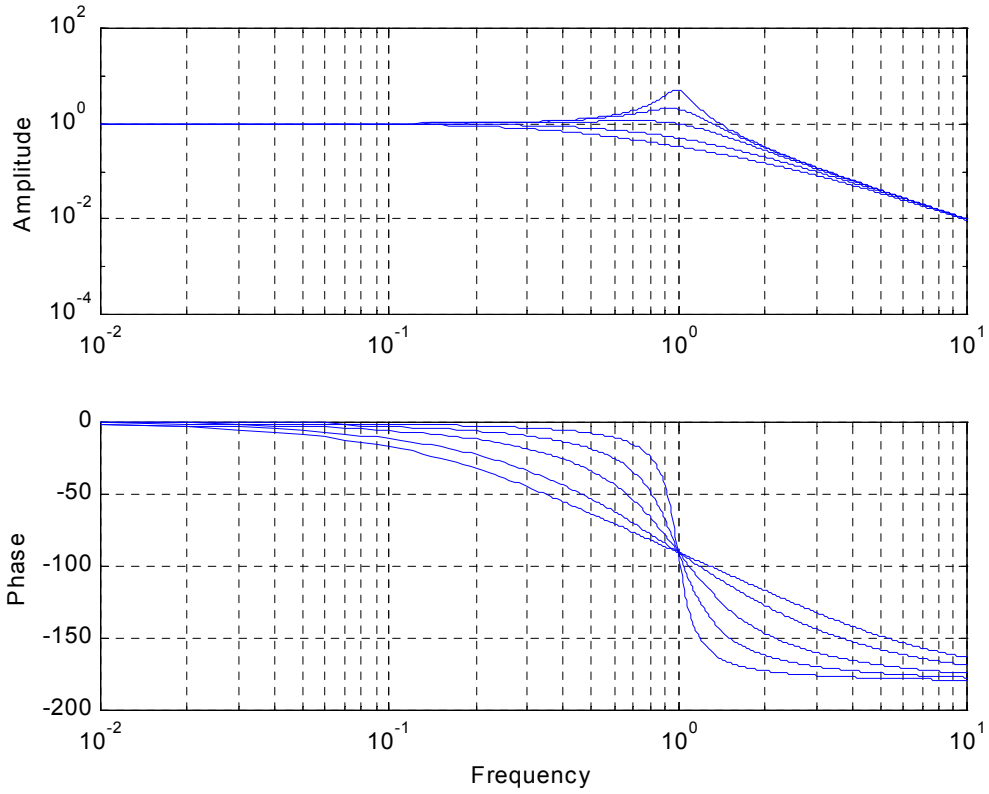
حل- لگاریتم رابطهٔ عبارت است از:

---

[1] Bode diagram

$$\log AR = -\frac{1}{2}\left[1+(2\tau\omega)^2\left(\zeta^2-1\right)+(2\tau\omega)^4\right]$$

رسم دیاگرام بد در شکل ۶-۲ نشان داده شده است.



شکل ۶-۲- دیاگرام بد سیستم درجهٔ دوم

۶-۴- دیاگرام بد برای حاصلضرب چند سیستم

اگر یک تابع انتقال متشکل از حاصلضرب چند تابع انتقال دیگر باشد، می‌توان از قواعد زیر استفاده کرد.

بطور مثال تابع انتقال یک سیستم به شکل زیر است:

$$G_p(s) = G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot\cdots\cdot G_n(s) \qquad (۶-۴)$$

نسبت دامنه‌ها عبارت است از:

$$\begin{aligned} AR &= \left|G_p(j\omega)\right| = \left|G_1(j\omega)\cdot G_2(j\omega)\cdot\cdots\cdot G_n(j\omega)\right| = \left|G_1(j\omega)\right|\cdot\left|G_2(j\omega)\right|\cdot\cdots\cdot\left|G_n(j\omega)\right| \\ &= AR_1\cdot AR_2\cdot\cdots\cdot AR_n \end{aligned} \qquad (۶-۵)$$

برای رسم دیاگرام بد باید لگاریتم این رابطه بدست آید.

$$\log AR = \log\{AR_1 \cdot AR_2 \cdot \cdots \cdot AR_n\} = \log AR_1 + \log AR_2 + \cdots + \log AR_n \qquad (۶-۶)$$

در مورد اختلاف فازها می‌توان نوشت که:

$$\begin{aligned}\varphi = \angle G_p(j\omega) &= \angle\{G_1(j\omega)\cdot G_2(j\omega)\cdot\cdots\cdot G_n(j\omega)\} = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \cdots + \angle G_n(j\omega)\\ &= \angle\varphi_1 + \angle\varphi_2 + \cdots + \angle\varphi_n\end{aligned} \qquad (۷-۶)$$

بر طبق این روابط برای رسم دیاگرام بد مشتمل بر حاصلضرب چند تابع انتقال می‌توان ابتداء دیاگرام بد هر تابع انتقال را جداگانه رسم کرده و در نهایت آنها را با هم جمع کرد. اکنون می‌توان علت آنکه اولا نمودار نسبت دامنه‌ها در مختصات لگاریتمی و ثانیا نمودار اختلاف فاز در مختصات نیمه لگاریتمی رسم می‌شود، را فهمید.

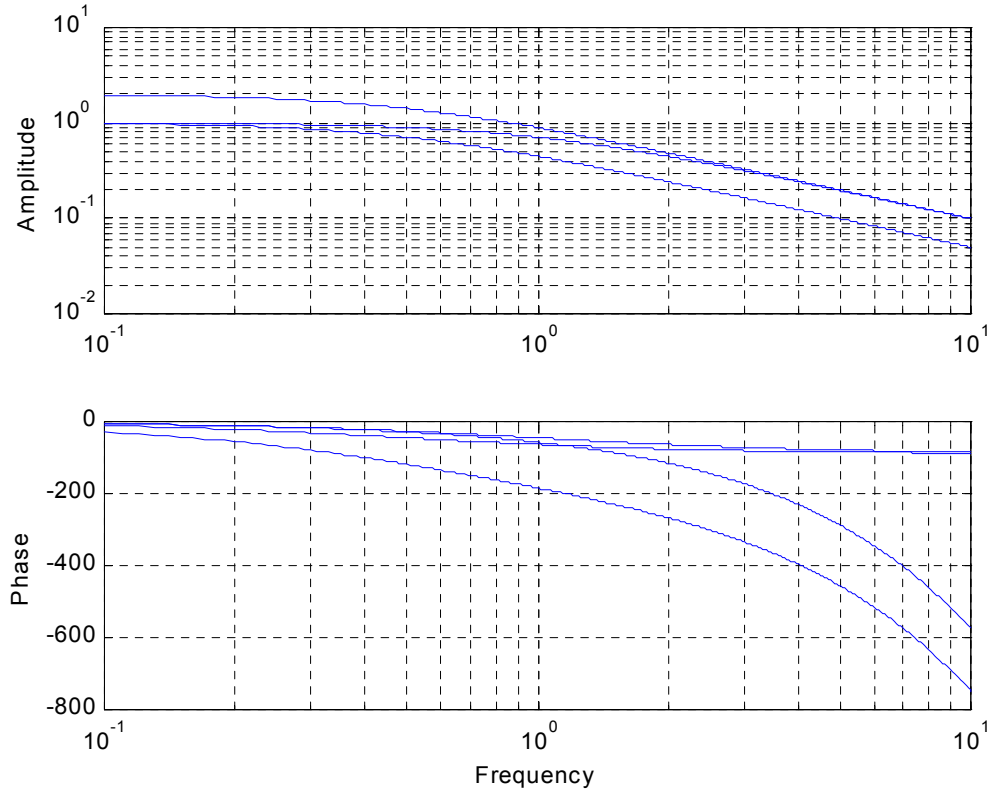
مثال ۶-۴- دیاگرام بد یک تابع انتقال پیچیده

دیاگرام بد سیستمی با تابع انتقال $G_p(s) = \dfrac{2e^{-s}}{(s+1)(2s+1)}$ را رسم کنید.

حل- این سیستم متشکل از سه قسمت است:

$$G_p(s) = 2e^{-s}\frac{1}{s+1}\frac{1}{2s+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{AR}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\frac{1}{\sqrt{1+(2\omega)^2}} \quad \& \quad \varphi = -\omega - \tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(2\omega)$$

دقت کنید که بهرهٔ 2 در مخرج نسبت دامنه‌ها نوشته شده است. بدین ترتیب نسبت دامنه‌ها از یک شروع می‌شود. در هر صورت وجود بهره تنها محل نمودار نسبت دامنه‌ها را روی محور عمودی جابجا کرده و شکل آنرا تغییر نمی‌دهد. در ادامه دیاگرام بد این سه سیستم جداگانه رسم شده و در آخر با هم جمع می‌شوند. شکل ۶-۳ حاصل را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۳- دیاگرام بد مثال ۶-۴

۶-۵- معیار پایداری بد

مهمترین مزیت معیار پایداری بد آن است که برای سیستم‌هایی با تاخیر انتقالی نیز کاربرد دارد. در حالیکه، تست روث برای سیستم‌های با معادله مشخصه به شکل چند جمله‌ای قابل استفاده است. طبق معیار پایداری بد اگر در فرکانس زاویه‌ای که اختلاف فاز -180° نسبت دامنه‌ها کمتر از یک باشد، آنگاه سیستم پایدار است. لازم بذکر است که معیار بد تنها برای سیستم‌های قابل استفاده است که دیاگرام بد آنها همواره نزولی باشد. فرکانسی که در آن اختلاف فاز -180° باشد، ***فرکانس عبور***[۱] نامیده می‌شود.

مثال ۶-۵- معیار پایداری بد

برای سیستمی با $G_{op}(s)=\dfrac{k_c\, e^{-5s}}{(2s+1)(4s^2+s+1)}$ ، محدودهٔ پایداری k_c را بدست آورید.

حل- تابع انتقال حلقه باز سیستم عبارت است از:

$$G_{op}(s)=\frac{k_c\, e^{-5s}}{(2s+1)(4s^2+s+1)}$$

رابطهٔ اختلاف فاز عبارت است از:

$$\varphi=-5\omega-\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\frac{\omega}{1-\omega^2}$$

در $\varphi=-\pi$ باید نسبت دامنه‌ها برابر یک شود. لذا با حل معادلهٔ زیر فرکانس عبور بدست می‌آید:

$$-5\omega-\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\frac{\omega}{1-\omega^2}=-\pi$$

این معادله یک معادله جبری مثلثاتی بوده و باید بطریق عددی حل شود. رسم دیاگرام بد کمک به بدست آوردن حل تقریبی می‌کند. با حل عددی جواب عبارت است از:

$$\omega=0.36\,{}^{rad}\!/_{time}$$

نسبت دامنه‌ها عبارت است از:

$$\frac{AR}{k_c}=\frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-4\omega^2\right)^2+\omega^2}}$$

در $\omega=0.36\,{}^{rad}\!/_{time}$ اگر نسبت دامنه برابر یک شود سیستم در آستانهٔ ناپایداری قرار می‌گیرد. بنابراین:

$$\frac{AR}{k_c}=\frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-4\omega^2\right)^2+\omega^2}}\Bigg|_{\omega=0.36}=1.35,\quad AR=1.0\quad\Rightarrow\quad k_c=0.74$$

لذا محدودهٔ پایداری این سیستم عبارت است از:

$$0<k_c<0.74$$

۶-۶- روش زیگلر- نیکولز Z-N برای طراحی کنترلر

زیگلر و نیکولز[۲] روشی برای تنظیم کنترلر پیشنهاد داده‌اند. بر طبق روش آنها ابتداء کنترلر P در نظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده دیاگرام بد یا محاسبه، محدودهٔ k_c و ω_{co} بدست می‌آید. این مقدار بهرهٔ نهائی k_u می‌باشد. پریود نوسانات متناظر با فرکانس زاویه‌ای نیز محاسبه می‌شود:

$$P_u=\frac{2\pi}{\omega_{co}}\qquad(۶-۸)$$

---

[۱] Crossover frequency

[۲] Ziegler-Nichols

اکنون با داشتن k_u و P_u مقدار پارامترهای کنترلر از جدول ۶-۱ محاسبه می‌شود.

جدول ۶-۱- پارمترهای کنترلر با استفاده از روش زیگلر-نیکولز

نوع کنترلر	k_c	τ_I	τ_D
P	$0.5k_u$	----------	----------
PI	$0.45k_u$	$\frac{P_u}{1.2}$	----------
PID	$0.6k_u$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$

این مقدارها نتیجه تجربهٔ فراوان و آزمایش‌های متعدد است.

مثال ۶-۶- روش زیگلر-نیکولز

تابع انتقال یک سیستم کنترلری از المان نهائی کنترل تا بعد از المان اندازه‌گیری $G_p(s)=\frac{e^{-0.5s}}{(s+1)(2s=1)}$ است. با استفاده از روش زیگلر-نیکولز یک کنترلر PID طراحی کنید.

حل- ابتداء یک کنترلر تناسبی در نظر گرفته می‌شود. نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز عبارت است از:

$$\frac{AR}{k_c}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\varphi=-0.5\omega-\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}2\omega$$

با استفاده از این دو رابطه فرکانس عبور، بهرهٔ نهائی و پریود نهائی محاسبه می‌شوند:

$$\omega_{co}=1.56\quad {rad}/{time},\quad k_u=6.9,\quad P_u=4.0\quad time$$

اکنون با استفاده از روابط جدول ۶-۱ می‌توان نوشت که:

$$k_c=0.6k_u=4.2,\quad \tau_I=\frac{P_u}{2}=2.0,\quad \tau_D=\frac{P_u}{8}=0.5$$

فصل هفتم

روش فضای حالت در طراحی کنترلر

۷-۱- مقدمه

روش فضای حالت سومین روش مهم در طراحی سیستم کنترلی می‌باشد. در این روش مستقیما از حالت‌های سیستم برای بررسی دینامیک فرآیند استفاده می‌شود. اگرچه این روش ظاهرا بسیار متفاوت از دو روش مکان ریشه‌ها و پاسخ فرکانسی است، اما با قدری دقت مشاهده می‌شود که این سه روش معادل یکدیگر هستند. روش فضای حالت برای تکنیک‌های کامپیوتری شکل مناسب است، به همین دلیل امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این روش معادلات دیفرانسیل بیان کننده فرآیند بصورت معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول همزمان نوشته می‌شوند. در این روش طراحی کنترلر توسط بررسی مستقیم بر روی حالت‌های سیستم انجام می‌گیرد. در زمینه معادلات دیفرانسیل ریاضیات، شکل متغیرهای حالت ***شکل معمولی***[۱] معادلات خوانده می‌شود. اگرچه این روش حدود ۱۰۰ سال است که شناخته شده اما آنرا معمولا با نام ***کنترل مدرن***[۲] می‌شناسند زیرا اخیرا به سبب پیشرفت کامپیوتر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. روشهای مکان ریشه‌ها و پاسخ فرکانسی روش ***کنترل کلاسیک***[۳] خوانده می‌شوند. روش فضای حالت خصوصا برای سیستم‌های که بیش از یک ورودی و یا خروجی دارند مفید است.

---

[۱] Normal form
[۲] Modern control
[۳] Classical control

۷-۲- مدل فضای حالت

یکی از روش‌های قدیمی که اخیرا با پیشرفت‌های کامپیوتر توسعه زیادی یافته است، روش ***فضای حالت***[۱] می‌باشد. بطور مثال مدل دو تانک ارتفاع سری بدون اثر متقابل (معادلات (۳-۱۴)) را می‌توان به شکل دو معادله دیفرانسیل همزمان نوشت.

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dh_1}{dt} = q - \dfrac{h_1}{R_1} \\ A_2 \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases} \qquad (۱۴-۳)$$

این معادلات را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{A_1 R_1} & 0 \\ \dfrac{1}{A_2 R_1} & \dfrac{-1}{A_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۱-۷)$$

اگر خروجی مورد نظر ارتفاع در تانک دوم باشد، می‌توان نوشت که:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \qquad (۲-۷)$$

این شکل نوشتن ماتریسی معادلات دیفرانسیل (که قبلا در درس معادلات دیفرانسیل دیده‌اید) را روش فضای حالت می‌نامند. این تنها شکل فضای حالت نبوده و معدلات را می‌توان به شکل‌های دیگری نیز نوشت.

شکل کلی فضای حالت عبارت است از:

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad (۳-۷)$$

که u ورودی سیستم است. خروجی سیستم عبارت است از:

$$y = g(x, u) \qquad (۴-۷)$$

بردار x **حالت‌های سیستم** نامیده می‌شوند. سیستم مرتبهٔ nام دارای n حالت است. حالت‌های یک سیستم در مدل الزاما مفاهیم فیزیکی صریح ندارند. برای سیستم خطی مدل فضال حالت به شکل زیر قابل نوشتن است:

---

[۱] State space form

(۵-۷)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

که A یک ماتریس $n \times n$ بوده و ماتریس سیستم نامیده شده، B یک ماتریس $n \times 1$ بوده و ماتریس ورودی نامیده شده، C یک ماتریس $1 \times n$ بوده و ماتریس خروجی نامیده شده و D یک عدد اسکالر بوده که جملهٔ انتقال مستقیم نامیده می‌شود. بنابراین، برای دو تانک ارتفاع سری بدون اثر متقابل می‌توان نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۶-۷)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

این تنها شکل فضای حالت نیست. یک فرآیند را به اشکال متفاوت می‌توان در شکل فضای حالت نوشت. برخی از این شکل‌ها در کنترل فرآیند استفاده ویژه دارند. یکی از این اشکال، ***شکل کنونیکال***[۱] (کنونیکال به معنی بر اساس قانون عمومی می‌باشد) نامیده می‌شود. اگر تابع انتقال یک سیستم به شکل زیر باشد:

$$G(s) = \frac{n_1 s^{n-1} + n_2 s^{n-2} + \cdots + n_n}{s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \cdots + d_n} \qquad (۷-۷)$$

شکل کنونیکال این سیستم عبارت است از:

$$A_c = \begin{bmatrix} -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [n_1 \quad n_2 \cdots n_n], \quad D_c = 0 \qquad (۸-۷)$$

که اندیس c نشانگر شکل کنونیکال است. البته این تنها شکل ماتریسی این معادلات نبوده و می‌توان شکل‌های متفاوتی نیز نوشت. برای دو تانک ارتفاع سری با اثر متقابل قبلا بدست آمد که:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2)s + 1} = \frac{\frac{R_2}{\tau_1 \tau_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{A_2 R_1}\right)s + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} \qquad (۲۵-۳)$$

بر اساس رابطه (۷-۹) شکل کنونیکال فضای حالت عبارت است از:

$$A_c=\begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{\tau_2}+\frac{1}{\tau_2}+\frac{1}{A_2R_1}\right) & \frac{1}{\tau_1\tau_2}\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B_c=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad C_c=\begin{bmatrix}0 & \frac{R_2}{\tau_1\tau_2}\end{bmatrix},\quad D_c=0$$

شکل دیگری از مدل فضای حالت شکل ***کنونیکال کیفی***[۲] نامیده می‌شود. در این شکل، قطب‌های تابع انتقال حلقهٔ باز در قطر ماتریس A نوشته می‌شود. بطور مثال تابع انتقال یک سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Y(s)=\frac{n_1s^{n-1}+n_2s^{n-2}+\cdots+n_n}{s^n+d_1s^{n-1}+d_2s^{n-2}+\cdots+d_n}=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-r_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{s-r_i} \qquad (۱۰-۷)$$

شکل کنونیکال کیفی عبارت است از:

$$A_m=\begin{bmatrix}-r_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -r_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -r_n\end{bmatrix},\quad B_m=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\quad C_m=[\alpha_1\quad \alpha_2\cdots\alpha_n],\quad D_m=0 \qquad (۱۱-۷)$$

شکل کنونیکال کیفی دو مشکل دارد: ۱) اگر قطب موهومی وجود داشته باشد، ماتریس نیز دارای عضو موهومی خواهد بود. ۲) اگر قطب مکرر وجود داشته باشد، ماتریس سیستم نمی‌تواند قطری باشد.

۷-۳- انتقال حالت

فرض کنید که معادلات حالت یک سیستم عبارت است از:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \qquad (۵-۷)$$

در نظر است که حالت x به حالت جدید z تبدیل شود. حالت جدید z انتقال خطی از x است. ماتریس انتقال T یک ماتریس غیرمنفرد است:

$$x=Tz \qquad (۱۲-۷)$$

---

[۱] Canonical control form

[۲] Modal Caninical form

این رابطه را در رابطه (۷-۵) قرار داده می‌شود:

$$\dot{x} = Tz = ATz + Bu \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = A'z + B'u \tag{۱۳-۷}$$

و همچنین:

$$y = CTz + Du \quad \Rightarrow \quad y = C'z + D'u \tag{۱۴-۷}$$

۷-۵- پاسخ دینامیکی بر اساس معادلات حالت

از رابطه (۷-۵) تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{۵-۷}$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \tag{۱۵-۷}$$

اکنون جملات حاوی $X(s)$ در یک طرف معادله جمع می‌شوند. باید در نظر داشت مواجهه با ضرب ماتریس می‌باشیم:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + x(0) \tag{۱۶-۷}$$

که I ماتریس واحد می‌باشد. با ضری طرفین در معکوس $(sI - A)$ بدست می‌آید که:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0) \tag{۱۷-۷}$$

خروجی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) + DU(s) \end{aligned} \tag{۱۸-۷}$$

در صورت تعریف متغیرهای انحرافی $x(0) = 0$ بوده و تابع انتقال فرآیند بدست می‌آید:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{۱۹-۷}$$

باید توجه کرد که با انتقال خطی تغییری در تابع تبدیل بوجود نمی‌آید.

دترمینان ماتریس $sI - A$ معادله مشخصه را ارائه می‌کند. ریشه‌های این معادله قطب‌های سیستم را می‌دهد. بنابراین، مقادیر مشخصه ماتریس A همان قطب‌های سیستم می‌باشند. همچنین دترمینان زیر صفرهای سیستم را می‌دهد:

(۲۰-۷)

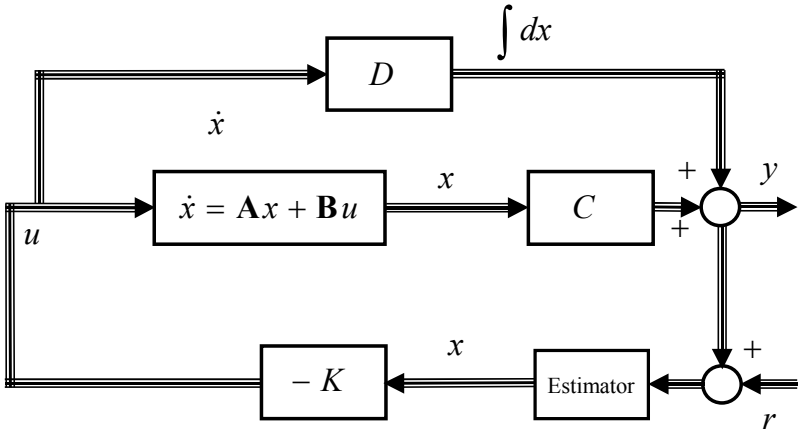
$$\det\begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}=0$$

بنابراین، تابع تبدیل بر اساس مدل فضای حالت عبارت است از:

$$G(s)=\frac{\det\begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}}{\det(sI-A)} \qquad (۲۱-۷)$$

۷-۶- طراحی کنترلر برای مدل فضای حالت کامل

طراحی کنترلر به روش فضای حالت مشتمل بر چند مرحله می‌باشد. شکل ۷-۱ اجزاء یک حلقه کنترل فیدبک با مدل فضای حالت را نشان می‌دهد. مراحل طراحی کنترلر در بخش‌های بعدی بحث می‌شوند.



شکل ۷-۱- حلقه کنترلی در فضای حالت

۷-۶-۱- انتخاب دستور کنترلی

ابتداء باید یک دستور کنترلی که ترکیب خطی از متغیرهای حالت باشد:

(۲۲-۷)

$$u=-Kx=-\begin{bmatrix}K_1 & K_2 & \cdots & K_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

فرض می‌شود که تمامی حالات سیستم در دسترس (قابل اندازه‌گیری یا تخمین زدن) می‌باشند. لذا برای یک سیستم درجهٔ nام دارای n بهره خواهد بود. در نتیجه می‌توان n بهره بدست آورد. با انتخاب K_i می‌توان محل ریشه‌ها در هر نقطه‌ای قرار داد. در حالیکه در روش مکان ریشه‌ها تنها یک پارامتر بهره وجود دارد. با قرار دادن این منطق کنترلی در مدل فضای حالت بدست می‌آید که:

$$\dot{x}=Ax-BKx \qquad (۲۳-۷)$$

معادله مشخصه این سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\det\left[sI-\left(A-BK\right)\right]=0 \qquad (۲۴-۷)$$

حاصل این دترمینان، یک چندجمله‌ای درجهٔ nام است که دارای بهره‌های $K_1, K_2, \cdots, K_n$ می‌باشد. اکنون می‌توان بهره‌ها را بگونه‌ای انتخاب کرد که ریشه‌ها در نقطهٔ دلخواه قرار گیرند. البته انتخاب ریشه‌های مناسب چندان راحت نیست. فرض می‌شود که ریشه‌های دلخواه عبارتند از:

$$s=s_1, s_2, \cdots, s_n \qquad (۲۵-۷)$$

بنابراین، معادله مشخصه مطلوب عبارت است از:

$$\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right)\cdots\left(s-s_n\right)=0 \qquad (۲۶-۷)$$

با مساوی قرار دادن معادلات (۷-۲۴) و (۷-۲۶) می‌توان بهره‌های مورد نظر را بدست آورد.

این روش محاسبه‌ها بهره قدری طولانی بوده و ممکن است جواب بدست نیاید. اما اگر سیستم به شکل کنترل کنونیکال نوشته شود بدست آوردن جواب بسیار ساده خواهد بود. شکل کنونیکال عبارت است از:

$$A_c=\begin{bmatrix}-d_1 & -d_2 & \cdots & -d_n\\1 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & & & \\0 & 1 & \cdots & 0\\0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B_c=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad C_c=\begin{bmatrix}n_1 & n_2 \cdots n_n\end{bmatrix},\quad D_c=0$$

لذا ماتریس سیستم حلقه بسته $A_c - B_c K_c$ عبارت است از:

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -d_1 - K_1 & -d_2 - K_2 & \cdots & -d_n - K_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots \quad 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۷-۷}$$

با مقایسه معادله (۷-۲۴) و (۷-۲۷) معادله مشخصه حلقهٔ بسته برابر است با:

$$s^n + \left(d_1 + K_1\right)s^{n-1} + \left(d_2 + K_2\right)s^{n-2} + \cdots + \left(d_n + K_n\right) = 0 \tag{۲۸-۷}$$

اگر محل مطلوب قطب‌ها در معادله مشخصه توسط معادله زیر داده شود:

$$s^n + \alpha_1 \; s^{n-1} + \alpha_2 \; s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0 \tag{۲۹-۷}$$

بهره‌های لازم برای رسیدن به قطب‌های مطلوب عبارت است از:

$$K_1 = -a_1 + \alpha_1, \quad K_2 = -a_2 + \alpha_2, \quad K_n = -a_n + \alpha_n, \tag{۳۰-۷}$$

از آنجا که این بهره برای شکل کنونیکال می‌باشد، باید به بهرهٔ اولیه تبدیل گردد:

$$K = K_c T^{-1} \tag{۳۱-۷}$$